序　　言

本书是 1963 年我在中国科学技术大学讲授高等数学时所用的讲义，主要论述复变函数论的一般理论，作为《高等数学引论》的第二卷第一分册出版.

那本讲义在讲授后曾作过较大的修改，可惜修改稿在“四害”横行时已被遗失了. 这份稿子是由仅能找到的原来科大的印刷稿稍加校订而成的. 考虑到《高等数学引论》第一卷出版至今已有十五年，广大读者希望能早日看到第二卷的出版. 如果这一分册全部重新改写，我的工作情况和身体条件也许会使这一分册的出版再推迟很长时间. 好在现在的版本基本上能反映作者的一些观点，所以为了争取时间也就不揣冒昧，将这一分册以现在的形式呈献给读者，并希望阅读后提出宝贵意见，以便再版时修正.

无比感谢党和人民对我的关怀和期望. 我决心以毛主席“为人民服务”的教导严格要求自己，争取在有生之年，把这套书写完整，写到底，为党为人民多做些工作，以报答党的恩情于万一.

华　罗　庚

一九七八年一月十九日于北京医院

目　录

第一章　复数平面上的几何 ······ 1

§1.　复数平面 ······ 1

§2.　复平面上的几何学 ······ 2

§3.　线性变形（Möbius 变形） ······ 4

§4.　群与分群 ······ 5

§5.　Neumann 球 ······ 7

§6.　交比 ······ 8

§7.　圆对 ······ 10

§8.　圆串（Pencil） ······ 11

§9.　圆族（Bundle） ······ 12

§10.　Hermitian 方阵 ······ 14

§11.　变形分类 ······ 17

§12.　广义线性群 ······ 19

§13.　射影几何的基本定理 ······ 21

第二章　非欧几何学 ······ 22

§1.　欧几里得几何学(抛物几何学) ······ 22

§2.　球面几何学(椭圆几何学) ······ 23

§3.　椭圆几何的一些性质 ······ 25

§4.　双曲几何（Лобачевский 几何） ······ 25

§5.　距离 ······ 26

§6.　三角形 ······ 29

§7.　平行公理 ······ 30

§8.　非欧运动分类 ······ 31

第三章　解析函数、调和函数的定义及例子 ······ 32

§1.　复变函数 ······ 32

§2.　保角变换(或称共形映照) ······ 32

§3.　Cauchy-Riemann 方程 ······ 35

§4.　解析函数 ······ 38

§5.　幂函数 ······ 40

§6.　Жуковский 函数 ······ 41

§7.　对数函数 ······ 42

§8.　三角函数 ······ 43

§9.　一般的幂函数 ······ 45

§10.　保角变换的基本定理 ······ 45

第四章　调和函数······47
§1.　中值定理······47
§2.　Poisson 公式······48
§3.　奇异积分······51
§4.　Dirichlet 问题······52
§5.　上半平面的 Dirichlet 问题······52
§6.　调和函数的展开式······54
§7.　Neumann 问题······55
§8.　最大值最小值原理······57
§9.　调和函数贯······58
§10.　Schwarz 引理······58
§11.　Liouville 定理······60
§12.　保角变换的唯一性······61
§13.　映进映照······61
§14.　单连通域的 Dirichlet 问题······62
§15.　单连通域的 Cauchy 公式······63
第五章　点集论与拓扑学中的若干预备知识······65
§1.　收敛······65
§2.　紧致点集······66
§3.　Cantor-Hilbert 对角线法······66
§4.　点集的类别······67
§5.　映照或变形······68
§6.　一致连续······68
§7.　拓扑映照······70
§8.　曲线······70
§9.　连通性······71
§10.　Jordan 定理的特例······72
§11.　连通数······74
第六章　解析函数······76
§1.　解析函数的定义······76
§2.　一些几何概念······77
§3.　Cauchy 定理······78
§4.　解析函数的微商······81
§5.　Taylor 级数······83
§6.　Weierstrass 重级数定理······84
§7.　由积分定义解析函数······87
§8.　Laurent 级数······88
§9.　零点，极点······90
§10.　孤立奇点······92

§ 11. 无穷远点的解析性 …… 94
§ 12. Cauchy 不等式 …… 95
§ 13. 解析拓展 …… 96
§ 14. 多值函数 …… 98
§ 15. 奇点的位置 …… 99
第七章 留数及其应用于定积分的计算 …… 102
§ 1. 留数 …… 102
§ 2. 有理函数沿圆周的积分 …… 102
§ 3. 由$-\infty$到$+\infty$的某种积分 …… 104
§ 4. 某些包有正弦余弦的积分 …… 105
§ 5. 积分 $\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx$ …… 107
§ 6. Γ 函数 …… 109
§ 7. Cauchy 主值 …… 111
§ 8. 与动量问题有关的积分 …… 112
§ 9. 极点与零点的个数 …… 112
§ 10. 代数方程的根 …… 114
§ 11. 级数求和 …… 115
§ 12. 常系数线性微分方程 …… 116
§ 13. Bürmann, Lagrange 公式 …… 117
§ 14. Poisson-Jensen 公式 …… 119
第八章 最大模原理与函数族 …… 121
§ 1. 最大模原理 …… 121
§ 2. Phragmen-Lindelöf 定理 …… 122
§ 3. Hadamard 三圆定理 …… 123
§ 4. 关于 $|f(z)|$ 均值的 Hardy 定理 …… 123
§ 5. 引理 …… 124
§ 6. 一般均值定理 …… 125
§ 7. $(I_p(r))^{\frac{1}{p}}$ …… 126
§ 8. Vitali 定理 …… 127
§ 9. 囿函数族 …… 129
§ 10. 正规族 …… 130
第九章 整函数与亚纯函数 …… 132
§ 1. 定义 …… 132
§ 2. Weierstrass 分解定理 …… 133
§ 3. 整函数的阶 …… 134
§ 4. Hadamard 分解定理 …… 136
§ 5. Mittag-Leffler 定理 …… 137
§ 6. ctg z 与 sin z 的表示式 …… 138

§ 7. Γ 函数 …… 141
§ 8. ζ 函数 …… 144
§ 9. 函数方程 …… 145
§ 10. 球面收敛 …… 147
§ 11. 亚纯函数的正规族 …… 148
第十章 保角变换 …… 151
§ 1. 重要内容概要 …… 151
§ 2. 单叶函数 …… 152
§ 3. Taylor 级数求逆 …… 153
§ 4. 域的映象 …… 155
§ 5. 单叶函数贯 …… 155
§ 6. 边界与内部 …… 156
§ 7. Riemann 映照定理 …… 157
§ 8. 第二系数的估计 …… 159
§ 9. 推论 …… 160
§ 10. Koebe 之歪扭定理 …… 162
§ 11. Littlewood 的估计 …… 163
§ 12. 星形区 …… 164
§ 13. 实系数 …… 166
§ 14. 把三角形变为上半平面 …… 167
§ 15. Schwarz 反射原理 …… 169
§ 16. 把四边形变为上半平面 …… 170
§ 17. Schwarz-Christoffel 法——把多边形变为上半平面 …… 172
§ 18. 续 …… 174
§ 19. 补充 …… 176
第十一章 求和法 …… 178
§ 1. Cesáro 求和法 …… 178
§ 2. Hölder 求和法 …… 180
§ 3. 与均值有关的两条引理 …… 181
§ 4. (C, k) 与 (H, k) 等价性的证明 …… 183
§ 5. (C, α) 求和 …… 185
§ 6. Abel 求和法 …… 186
§ 7. 一般求和法简介 …… 187
§ 8. Borel 求和法 …… 188
§ 9. Hardy-Littlewood 定理 …… 191
§ 10. Tauber 定理 …… 193
§ 11. 在收敛圆圆周上的渐近性质 …… 195
§ 12. Hardy-Littlewood 定理 …… 196
§ 13. Littlewood 的 Tauber 定理 …… 200

§ 14. 解析性与收敛性 …… 202
§ 15. Borel 多角形 …… 205
第十二章 适合各种边界条件的调和函数 …… 208
§ 1. 引言 …… 208
§ 2. Poisson 方程 …… 209
§ 3. 双调和方程 …… 212
§ 4. 单位圆的双调和方程 …… 213
§ 5. Cauchy 型积分的背景 …… 214
§ 6. Cauchy 型积分 …… 216
§ 7. Сохоцкий 公式 …… 217
§ 8. Hilbert-Привалов 问题 …… 220
§ 9. 续 …… 222
§ 10. Riemann-Hilbert 问题 …… 223
§ 11. 混合边界值问题解答的唯一性 …… 224
§ 12. Келдыш-Седов 公式 …… 226
§ 13. 其他域的 Келдыш-Седов 公式 …… 228
§ 14. 一个混合型偏微分方程 …… 230
第十三章 Weierstrass 的椭圆函数论 …… 233
§ 1. 模 …… 233
§ 2. 周期函数 …… 234
§ 3. 周期整函数的展开式 …… 235
§ 4. 基域 …… 236
§ 5. 椭圆函数的一般性质 …… 236
§ 6. 代数相关性 …… 238
§ 7. 椭圆函数的两种理论 …… 239
§ 8. Weierstrass ζ 函数 …… 239
§ 9. $\gamma(z)$ 与 $\gamma'(z)$ 的代数关系 …… 241
§ 10. 函数 $\zeta(z)$ …… 242
§ 11. $\sigma(z)$ 函数 …… 243
§ 12. 椭圆函数的一般表达式 …… 244
§ 13. 加法公式 …… 246
§ 14. 椭圆函数的积分 …… 247
§ 15. 代数函数域 …… 248
§ 16. 反问题 …… 249
§ 17. 模变换 …… 250
§ 18. 基域 …… 252
§ 19. 基域纲 …… 255
§ 20. 模群三构造 …… 256
§ 21. 模函数的定义和性质 …… 257

§ 22. $J(\tau)$ …… 259
§ 23. 方程 $g_2(w, w') = a$, $g_3(w, w') = b$ 的求解 …… 261
§ 24. 任一模函数是 $J(\tau)$ 的有理函数 …… 261
第十四章 Jacobi 的椭圆函数 …… 265
§ 1. ϑ 函数 …… 265
§ 2. ϑ 函数的零点与无穷乘积的表达式 …… 267
§ 3. $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})$ …… 268
§ 4. 用 ϑ 函数表椭圆函数 …… 271
§ 5. 诸 ϑ 函数的平方的关系式 …… 273
§ 6. 和差公式 …… 274
§ 7. ϑ 函数的商所适合的微分方程 …… 276
§ 8. Jacobi 的椭圆函数 …… 277
§ 9. 周期性 …… 278
§ 10. 解析性质 …… 279
§ 11. Weierstrass 函数与 Jacobi 函数之间的关系 …… 280
§ 12. 加法公式 …… 281
§ 13. 把 K, K' 表为 k, k' 的函数 …… 281
§ 14. Jacobi 椭圆函数的一些表达式 …… 283
§ 15. 附记 …… 284

第一章 复数平面上的几何

§1. 复 数 平 面

一个复数可以写成为

$$z = x + yi. \tag{1}$$

这儿 x 与 y 都是实数，x 称为 z 的实数部分，y 称为 z 的纯虚部分，各以 $Rz(=x)$, $Iz(=y)$ 表之．如果两个复数的实部和纯虚部分别相等，我们就说这两个复数相等．$x - yi$ 称为 z 的共轭数，以 $\bar{z}$ 表之．

对复数的运算我们作如下规定：任给两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

两数之和为 $$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

两数之积为 $$z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

在平面上取垂直坐标系．对应于一个复数 (1)，我们有一点 P，它的坐标是 (x, y)，这点称为复数 z 的写象．这样就建立起复数与平面上的点之间的一一对应的关系．实数对应于 x 轴上的点，因此 x 轴有时也称为实轴．同样原因，y 轴也称为虚轴．今后我们不再区别复数与平面上的点，例如，如果我们说点 $1 + i$ 就是指 $x = 1$, $y = 1$ 所代表的点．

从原点 O 到 P 作一线段，称为矢量 $\overrightarrow{OP}$．对应于一个复数有一个由原点出发的矢量，反之亦然．而且，复数的和对应于矢量之和．矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

称为 z 的绝对值或模，以 $|z|$ 表之．矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的交角 θ 称为辐角，以 $\theta = \arg z$ 表之．度量的方向以反时针方向为正，显然有

$$z = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}. \tag{2}$$

不难证明：在此表示法下，两复数 $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ 之积为 $z_1z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$．必须注意辐角是不唯一的．$(\rho, \theta)$ 固然代表 z，而 $(\rho, \theta + 2\pi)$ 也代表 z．更一般地说

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2k\pi \ (\text{如果 } z \text{ 在 I, IV 象限}) \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k + 1)\pi \ (\text{如果 } z \text{ 在 II, III 象限}) \end{cases}$$

这儿 k 是任意整数，而 arctg 表示适合于

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

的反正切函数．适合于

$$-\pi < \varphi = \arg z \leqslant \pi$$

的 φ 称为主值，以 $\arg z$ 表之．

这样表示复数的平面称为 Argon 平面或 Gauss 平面，或迳称为复平面．

以 c（复数 $\beta + i\gamma$）为圆心，以 ρ（实数）为半径的圆的方程式是

$$|z - c| = \rho, \tag{3}$$

也就是 $(z-c)(\overline{z-c}) = \rho^2$，即

$$z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + c\bar{c} = \rho^2.$$

更一般些，考虑

$$\alpha z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + \delta = 0, \tag{4}$$

这儿 α, δ 是实数，当 $\alpha = 0$ 时，(4) 代表直线

$$\beta x + \gamma y - \frac{\delta}{2} = 0.$$

这是一般的直线方程．如果 $\alpha \neq 0$，则由 (4) 得

$$\left(z - \frac{c}{\alpha}\right)\left(\overline{z - \frac{c}{\alpha}}\right) = \frac{c\bar{c}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}.$$

如果 $c\bar{c} > \delta\alpha$，则 (4) 代表以 $\frac{c}{\alpha}$ 为圆心，$\sqrt{\frac{c\bar{c}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}}$ 为半径的圆．当 $c\bar{c} = \delta\alpha$ 时，(4) 所代表的圆化为一点 $\frac{c}{\alpha}$，称为点圆．当 $c\bar{c} < \delta\alpha$ 时，(4) 没有实轨迹，则 (4) 代表一个虚圆．

附记．把 (4) 的系数列成为

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{c} \\ -c & \delta \end{pmatrix}.$$

这是一 Hermitian 方阵．一个 Hermitian 方阵代表一个圆，反之，不同的 Hermitian 方阵可能代表同一圆．不难证明，两个 Hermitian 方阵代表同一圆的条件是它们相差一个实数因子．

如果 H 的行列式是正的，则它代表虚圆；负的，代表实圆；0 代表点圆．

§2. 复平面上的几何学

考虑变换（或称变形）

$$w = az + b, \quad a \neq 0. \tag{1}$$

（a, b 是复的常数）对应于一个复数 z，我们有一个复数 w，并且可以解得

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}. \tag{2}$$

而对应于一个 w，也有唯一的一个 z，因此变换 (1) 把复平面一一对应地变为其自己．又如

$$z = a_1 z_1 + b_1, \quad a_1 \neq 0,$$

则得

$$w = a(a_1 z_1 + b_1) + b = aa_1 z_1 + ab_1 + b.$$

依旧如 (1) 的形式，即连续施行两次形如 (1) 的变形依然是形如 (1) 的变形，这些性质可以概括为“群”的概念．所有的形如 (1) 的变换称为成一整线性变换群．

我们现在先研究在此变换群之下的“几何学”．

首先，任何一点可以变为任何一点，即如果给了任何二点 z_0 及 w_0 我们可以找到一个

形如 (1) 的变换把 z_0 变为 w_0. 显然

$$w = z + (w_0 - z_0)$$

有此功能,这一性质称为可递性,即在整线性变换群下,复平面成一可递集合.

其次,任何两点可以变为任何两点,例如变形

$$w = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} z + \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} \tag{3}$$

可以把 z_1 变为 w_1, 把 z_2 变为 w_2.

再次考虑三个点的问题,并不是任意三点都能变为任意三点. 三点 z_1, z_2, z_3 依次变为 w_1, w_2, w_3 的条件是

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}. \tag{4}$$

显然 (3) 把 z_1, z_2 变为 w_1, w_2. 又由 (4) 可知

$$\frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} z_3 + \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} = w_1\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) + w_2\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right)$$
$$= w_1\left(\frac{w_3 - w_2}{w_1 - w_2}\right) + w_2\left(\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right) = w_3,$$

即如果条件 (4) 适合,则 (3) 就把 z_1, z_2, z_3 依次变为 w_1, w_2, w_3. 反之,如果

$$w_i = a z_i + b,$$

则得

$$\begin{vmatrix} w_1 & z_1 & 1 \\ w_2 & z_2 & 1 \\ w_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

这等价于 (4). 概括起来可以作如下的说法: 三点定一比 $\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$, 三点可以依次变为另三点的必要且充分条件是比值相等.

比值的几何意义是什么? 命

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \rho e^{i\theta}.$$

ρ 是三角形两边边长之比, 而 θ 是夹角, 也就是如果两个三角形有一角相等, 夹这角的两边的比例相等,则可以由整线性变换把其一变为另一.

刚才是以点为对象的几何学,现在以直线及圆为对象来进行研究,变形 (1) 显然变直线为直线,变圆为圆.

直线的一般形式是

$$I(cz + d) = 0. \tag{5}$$

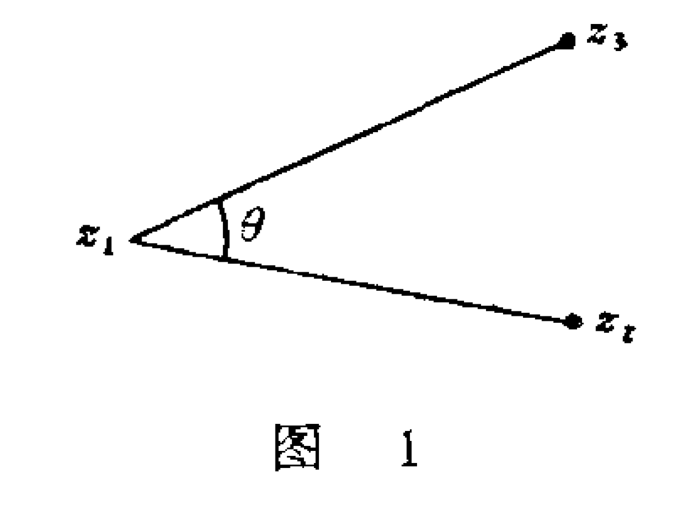


图 1

变换 $w = cz + d$ 把直线 (5) 变为 $Iw = 0$, 即变为实轴, 因此复平面上的任一直线可经过整线性变换变为实轴, 也就是直线成一可递集合.

两条直线可以变为两条直线的必要且充分条件是前二直线的夹角等于后二直线的夹角,读者试自证之.

圆的一般形式是

$$(z-c)(\overline{z-c})=\rho^2.$$

经变换 $z-c=\rho w$ 可以变为 $w\bar{w}=1$，即以原点为中心的单位圆．因此，任何(实)圆都可以变为单位圆,也就是在整线性变换群之下,(实)圆成一可递集．

读者试自求出两圆变为两圆的必要且充分条件,先分相交不相交，相交的看交角，不相交的看什么?

§3. 线性变形（Möbius 变形）

现在研究比整线性变换群更一般的群：这群是由形如

$$w=(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc\neq 0 \tag{1}$$

的变换所组成的,特别当 $c=0$ 时这就是整线性变换．由所有的形如 (1) 的变换所成的集合称为线性变换群．变换 (1) 称为线性变换或 Möbius 变换或称射影变换．显然 (1) 有逆变换

$$z=(dw-b)/(-cw+a). \tag{2}$$

也不难证明连续施行两次形如 (1) 的变换其结果仍然是形如 (1) 的变换，所得出的变换称为前两变换之积．

但有一点需注意，(1) 并不把复平面一对一地变为其自己，由 (1) 可见并无 w 与 $z=-\dfrac{d}{c}$ 对应,由 (2) 可见并无 z 点可以对应于 $w=\dfrac{a}{c}$．

如果要求一一对应，我们势必要扩充我们的复平面．加上一个无穷远点，即 (1) 把 $-\dfrac{d}{c}$ 变为无穷远点 $w=\infty$．而 $z=\infty$ 这一点经 (1) 而变为 $\dfrac{a}{c}$．

加上无穷远点的平面称为函数论平面或称一维复射影空间．一维复射影几何学就是研究在一维射影群下,一维射影空间的性质．

较严格的定义如下考虑：非全为零的一对复数 (z_1, z_2)，如果有一个复数 $p(\neq 0)$ 使

$$z_1=pw_1,\quad z_2=pw_2,$$

则两个复数对 (z_1, z_2) 及 (w_1, w_2) 称为等价,用符号

$$(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$$

表之．等价关系显然有以下的三性质:

(i) $(z_1, z_2)\sim(z_1, z_2)$;

(ii) 若 $(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$，则 $(w_1, w_2)\sim(z_1, z_2)$;

(iii) 若 $(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$，$(w_1, w_2)\sim(u_1, u_2)$，则 $(z_1, z_2)\sim(u_1, u_2)$.

依等价关系把所有的非 0 复数对分类,凡等价的归一类,不同类的对一定不等价．每一类定义一点，这些点的集合便成一维射影空间．如果 $z_2\neq 0$，则 $\dfrac{z_1}{z_2}=z$ 就是普通复平面上的点,而 (z_1, z_2) 称为点 z 的齐次坐标，这说明与 (z_1, z_2) 同一类的 (pz_1, pz_2) 也代表同一点 z．如果 $z_2=0$，则 (z_1, z_2) 代表无穷远点，由于 $(z_1, 0)\sim(1, 0)$，所以无穷远点是唯一的．

在齐次坐标下线性变换也可以写成为

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + bz_2, \\ w_2 = cz_1 + dz_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

用矩阵符号可以写成为

$$(w_1, w_2) = (z_1, z_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

注意,并不是对应于一个方阵 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 就有一个变换.

由于等价关系,对任一 $p(\neq 0)$, $\begin{pmatrix} ap & cp \\ bp & dp \end{pmatrix}$ 也代表相同的变换,这一点从 (1) 也显然可以看出,因为分子分母同乘一数 p, 其值不变.

方阵

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

也称为变形 (1) 的方阵,但需注意,对任一 $p \neq 0$, $p\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 都是代表同一变换.

对应于方阵

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

的两个变形之积的方阵等于所对应的方阵之积

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + b_1c, & ac_1 + cd_1 \\ ba_1 + db_1, & c_1b + dd_1 \end{pmatrix}.$$

§4. 群 与 分 群

定义 1. 如果一个线性变换的集合适合于以下的三条件则称为成一个群:

(i) 包有单位变换: $w = z$.

(ii) 包有逆变换: 即如果它包有 $w = (az + b)/(cz + d)$, 则也包有

$$w = (dz - b)/(-cz + a).$$

(iii) 包有其中任二变换之积: 即如果它包有

$$w = (az + b)/(cz + d),\ w = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1),$$

则也包有

$$\begin{aligned} w &= [a(a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) + b]/[c(a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) + d] \\ &= [(aa_1 + bc_1)z + (ab_1 + bd_1)]/[(ca_1 + dc_1)z + (cb_1 + dd_1)]. \end{aligned}$$

定义 2. 一个群的一部分如果也成一群,则这部分称为原群的分群(或子群).

例 1. 所有的线性变换成一群.

例 2. 所有的整线性变换成一群,这是线性变换群的分群.

例 3. 所有的形如 $w = z + a$ 的变换成一群,称为平移群,它是整线性变换群的分群.整线性变换群之另一分群是

$$w = az,\ a \neq 0.$$

而这个群又有两个重要分群. 对正数 k, 所有的形如 $w = kz$ 的变换所成的群, 称为放

大缩小群．对所有的绝对值等于1的数 $e^{i\theta}$，$w=e^{i\theta}z$ 成一个群，称为旋转群．

例 4. 对实数 a, b, c, d,

$$w=(az+b)/(cz+d),\ ad-bc\neq 0$$

也成一群，称为实群．适合于 $ad-bc=1$ 的成一实群的分群．

例 5. 形如

$$w=(az-b)/(\bar{b}z+\bar{a}),\ a\bar{a}+b\bar{b}=1$$

的变形也成一群，称为酉群．

例 6. 形如

$$w=az+b,\ |a|=1$$

的变换成一群．如果写成实数的形式，即命

$$w=u+iv,\ z=x+iy,\ a=e^{i\theta},\ b=p+iq,$$

则得

$$u=x\cos\theta-y\sin\theta+p,$$
$$v=x\sin\theta+y\cos\theta+q.$$

这就是我们所习知的刚体运动，即旋转与平移，因此这群也可以称为刚体运动群．

例 7. 形如

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

的变形也成一群．这群称为非欧运动群，或称 Лобачевский 群．

例 8. 所有的形如

$$w=z+\omega k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

的变换成一群，称为以 ω 为周期的群．它是以下的双周期群的子群，

$$w=z+\omega l+\omega' k,\ l,k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

例 9. 如果 a, b, c, d 是适合于

$$ad-bc=1$$

的整数，则形如

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的线性变换也成一群，称为模群．

例 10. 如果 a, b, c, d 是适合于

$$ad-bc=1$$

的复整数（如果 α_1, α_2 都是整数，$a=\alpha_1+\alpha_2 i$ 称为复整数．），则形如

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的变形也成一群．

定义． 在一群 G 中如果可以找出一批变换，使 G 中任一变换都可表为这些变换及其逆变换之积，则这批变换称为群的演出元素．

例 11. 例 8 中所给的群，以

$$w=z+\omega$$

为周期群的演出元素．而双周期群以

$$w=z+\omega,\ w=z+\omega'$$

为其演出元素.

例 12. 整线性变换所成的群,可以由以下诸元素演出之:

(i) $w = z + b$,(平移),

(ii) $w = e^{i\theta}z$,(旋转),

(iii) $w = kz$,(放大缩小),$k > 0$.

"放大缩小"或称"仿射". 演出元素有以下的功用: 任何一个性质经平移,旋转,仿射而不变,则经整线性变换也不变. 例如,两直线的夹角. 反之,如两点间的距离虽经平移与旋转不变,但它经仿射而变化,因此距离在整线性变换群下是可能变化的.

例 13. 再看线性群,由于

$$w = (az + b)/(cz + d), \quad c \neq 0$$

可以变为

$$w = \frac{a}{c} + z', \quad z' = \frac{1}{z''}, \quad z'' = \frac{c(cz + d)}{bc - ad}$$

之积,因此这群可由整线性变换群添加 $w = \frac{1}{z}$ 而得之. (如果 $c = 0$, 则本身就是整线性变换,毋待多论.)因此,线性变换可以由平移,仿射,旋转及 $w = \frac{1}{z}$ 演出之.

§ 5. Neumann 球

为了把无穷远点讲得更清楚,我们引进球面投影法,建立起球面与平面的关系.

作一球,其半径为 1,其球心在原点. 设球面动点为 $P(\xi, \eta, \zeta)$, 则此球面的方程式是

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1}$$

从点 $N = (0, 0, 1)$ 把球上之一点 $P = (\xi, \eta, \zeta)$ 投影于 ξ-η 平面上之一点 $Q = (x, y)$. 命 T 为以 ON 与 OQ 为边的矩形的另一顶点. 命 SPF 平行于 NO, 命 FG 与 QH 平行于 η 轴, 则 $OG = \xi$, $FG = \eta$, $PF = \zeta$, $OH = x$, $QH = y$. 由于三角形 NSP 与 NTQ 的相似性,可知

$$(1 - \zeta):1 = SP:TQ = NS:NT = OF:OQ = \eta:y = \xi:x.$$

所以

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \tag{2}$$

由 (1) 可知

$$1 + x^2 + y^2 = \frac{(1 - \zeta)^2 + \xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 - 2\zeta + 1}{(1 - \zeta)^2} = \frac{2}{1 - \zeta}.$$

图 2

因此

$$\xi = \frac{2x}{r}, \quad \eta = \frac{2y}{r}, \quad \zeta = 1 - \frac{2}{r}, \quad r = 1 + x^2 + y^2. \tag{3}$$

写 $z=x+iy$，公式(2)与(3)建立单位球与复射影平面间的一一对应关系($z=\infty$ 对应于 N).

平面上一个圆

$$\alpha(x^2+y^2)+2\beta x+2\gamma y+\delta=0 \tag{4}$$

变为

$$\alpha\left(\frac{2}{1-\zeta}-1\right)+2\beta\frac{\xi}{1-\zeta}+2\gamma\frac{\eta}{1-\zeta}+\delta=0.$$

即

$$(\alpha-\delta)\zeta+2\beta\xi+2\gamma\eta+\alpha+\delta=0. \tag{5}$$

这是一个平面，与单位球交于一圆．反之有一平面(5)，我们在复射影平面上也得一圆(4)．现在证明：视(5)交，切，或不交单位球而决定圆(4)为实圆，点圆，虚圆.

从几何上来说明这问题十分容易．如果(4)是实圆，由投影法的性质，在单位球上一定有轨迹，它是单位球与(5)的交线，即(5)一定与单位球相交，同样证明相切及不相交的情况．因此虚圆在三维空间也有了实表示法，即一个不交于单位球的平面．但必须注意唯一的例外，即虚圆 $z\bar{z}+1=0$ 所对应的(5)是 $2=0$，是一矛盾方程.

现在我们研究球上大圆在平面上所对应的圆的性质．一个大圆与赤道交于两点，这两点是平面上单位圆的一个直径的两端．因此球上的一个大圆对应于平面的交单位圆于一直径两端的圆，反之亦真．从这个性质我们容易证明以下的初等平面几何上的定理.

定理 1. 假定两个圆 A, B 都交定圆 Γ 于直径之两端，则 A, B 一定有两个交点．过这两交点作圆 C，它也是交 Γ 于直径两端的圆.

证．设两圆 A, B 对应于球面上大圆 A_1, B_1．他们的交点是球的直径的两端．假定 C_1 是对应于 C 的圆，由其过球的直径之两端，因此 C_1 是大圆，其对应的 C 当然是交于 Γ 的直径两端的圆.

§6. 交　比

现在考虑线性群下的几何学.

由于线性群的子群整线性群已经能把任意两点变成为任意两点，因此射影空间成一可递集，任意二点可以变为任意二点.

现在再证任意三点可以变为任意三点．由以上的性质不妨假定三点中之二已经变为 $0, \infty$，而另一是 a，则再施行

$$w=a^{-1}z,$$

可以把原来三点变为 $0, 1, \infty$.

由于使 $0, 1, \infty$，都不动的变换是恒等变换，故任意四点并不能变为任意四点.

定义.

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}\bigg/\frac{z_4-z_1}{z_2-z_4}$$

称为 (z_1, z_2, z_3, z_4) 之交比，特别当 $(z_1, z_2, z_3, z_4)=-1$，谓四点 z_1, z_2, z_3, z_4 组成调和点列.

定理 1. 交比经线性变换后保持不变.

命

$$w_i = (az_i + b)/(cz_i + d),$$

则

$$w_i - w_j = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)},$$

因此

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

定理 2. 四点 w_1, w_2, w_3, w_4 可以依次变为 z_1, z_2, z_3, z_4 的必要且充分条件是它们的交比相等.

证. 前已证明如果 $w_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 可以依次变为 $z_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，则交比相等.

任意四点中的三点可以变为 $0, \infty, 1$，假定四点已变成为 $0, \infty, z, 1$，则交比等于 z. 即任何交比为 z 的四点一定可以变为 $0, \infty, z, 1$. 证毕.

具体地看一下，线性变换

$$w = (z_1, z_2, z_3, z) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \Big/ \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \frac{z_2 - z}{z - z_1}.$$

它把 z_2 变为 0，z_1 变为 ∞，而把 z_3 变为 1. 因此

$$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z) \tag{1}$$

定义一个线性变换，把 $z = z_1, z_2, z_3$ 变为 $w = w_1, w_2, w_3$.

由于交比的不变性，此线性变换是唯一具有此性质的. 因此，(1) 所表示者乃线性变换的一般形式，即三对对应点唯一地决定一个线性变换. 这个变换就是 (1) 式.

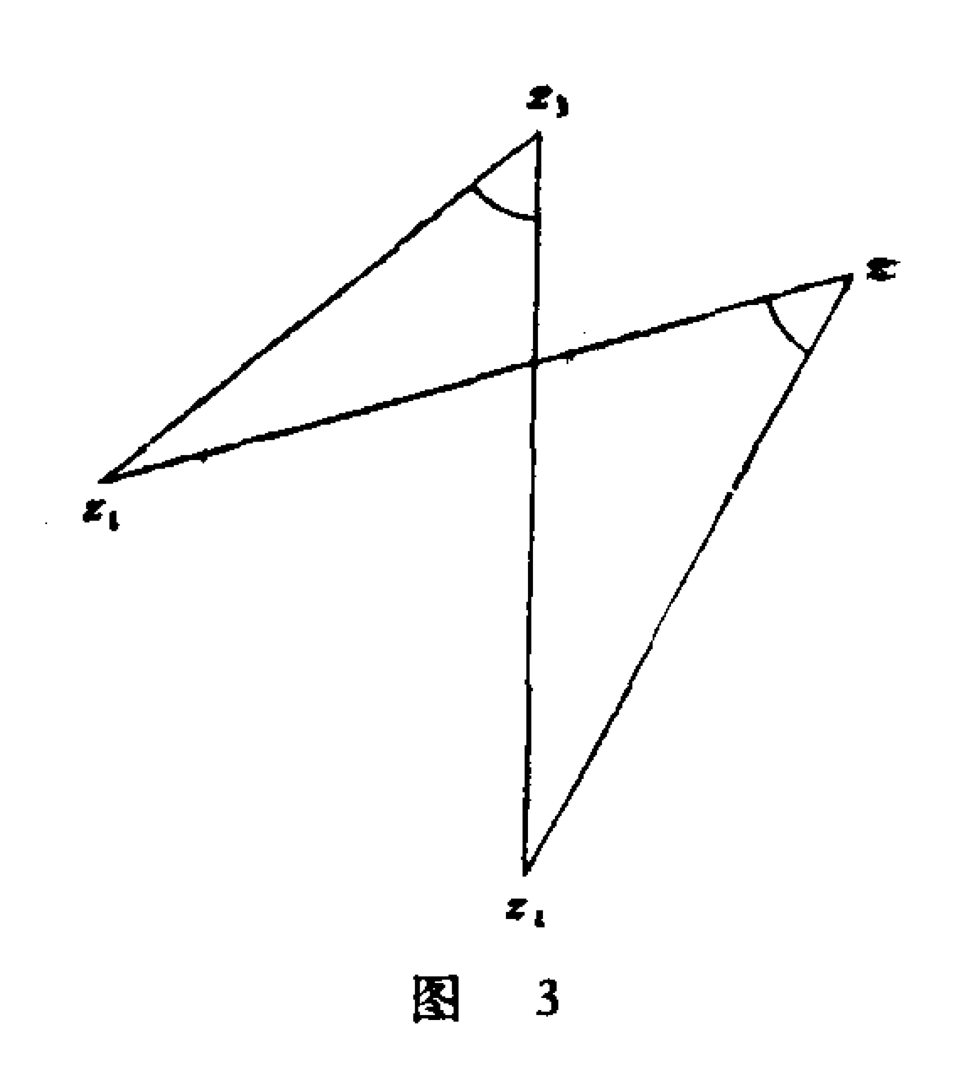


图 3

考虑交比的辐角

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z) = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \angle z_1 z z_2 - \angle z_1 z_3 z_2.$$

如果交比是实数，即 $\angle z_1 z z_2 = \angle z_1 z_3 z_2$，可见 z 在经三点 z_1, z_2, z_3 的圆周上. 反之亦然.

若 (z_1, z_2, z_3, z) 是实数，则由 (1) 所定义的 (w_1, w_2, w_3, w) 也是实数. 因此，当 z 过由 z_1, z_2, z_3 所决定的圆周时，w 也过由 w_1, w_2, w_3 所决定的圆周. 但需注意，如果 z_1, z_2, z_3 在一直线上，则所定的直线亦叫"圆"，可以认为是半径为∞的"圆".

所以线性变换把圆变为圆. 特别取 $z_1 = 1$，$z_2 = -1$，$z_3 = -i$，则过 z_1, z_2, z_3 的圆是单位圆. 取 $w_1 = \infty$，$w_2 = 0$，$w_3 = 1$，则过 w_1, w_2, w_3 的圆是 x 轴，因此得变换

$$w = (w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z) = i\frac{1 + z}{1 - z}. \tag{2}$$

它把单位圆变为实轴，并且把单位圆的内部 $|z| < 1$ 变为上半平面 $Iw > 0$.

如果取另一次序 $z_1 = -1$，$z_2 = 1$，$z_3 = -i$，则得

$$w = -i\frac{1 - z}{1 + z}.$$

它把圆的外部 $|z|>1$ 变为上半平面 $Iw>0$.

又取 $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\infty$, 则

$$w=\frac{z-1}{z}=1-\frac{1}{z}.$$

这变形把上半平面变为其自已. 又取 $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=\infty$, 则

$$w=\frac{z}{z-1}.$$

它把上半平面变为下半平面.

(读者试求出: z_1, z_2, z_3 以任何次序取 0, 1, ∞ 的各种变形. 并且区别哪些是变上半平面为上半平面者,哪些是变上半平面为下半平面者.)

§7. 圆 对

以圆为几何对象. 上节已经说明了,在线性变换群下,平面上所有的圆(包括直线)成一可递集. 现在我们来考虑圆对的问题.

定理 1. 线性变换使二圆的交角不变.

证. 假定两圆的交点在 z_1, z_2(图 4). 在二圆上各取一点 z_3, z_4. 这些点交比的辐角

$$\arg(z_3, z_4, z_1, z_2)=\angle z_3z_2z_4-\angle z_3z_1z_4.$$

当 z_3 与 z_4 都趋近于 z_1 时,即得两圆之交角. 由交比的不变性,故定理得证.

定理 2. 两个相切的圆可以变为任意两个相切的圆. 两对相交的圆的夹角如果相等,则可由其一对变为另一对.

证. 把交点之一变为 ∞, 则得: (i) 把相切圆变为平行线, (ii) 把相交圆变为二相交的直线.

任意两条平行线可以变成为 $y=0$ 与 $y=1$. 故得第一段结论. 任意夹角为 θ 的直线可变 $y=0$ 及 $x\sin\theta-y\cos\theta=0$. 因得第二结论.

也就是: 相交的两圆以夹角为其唯一的不变量.

再看不相交的情况. 假定 A, B 是两个不相交的圆. 先把 A 变为一条直线 A_1, 同时把 B 变为圆 B_1(图 5). A_1 与 B_1 也不相交. 通过 B_1 的中心作一直线 l 垂直于 A_1, 交 A_1 于 M. 以 M 为中心作一圆 C 正交 B_1. 由于 C, l 相交,由定理 1 可知有一线性变换把 C,

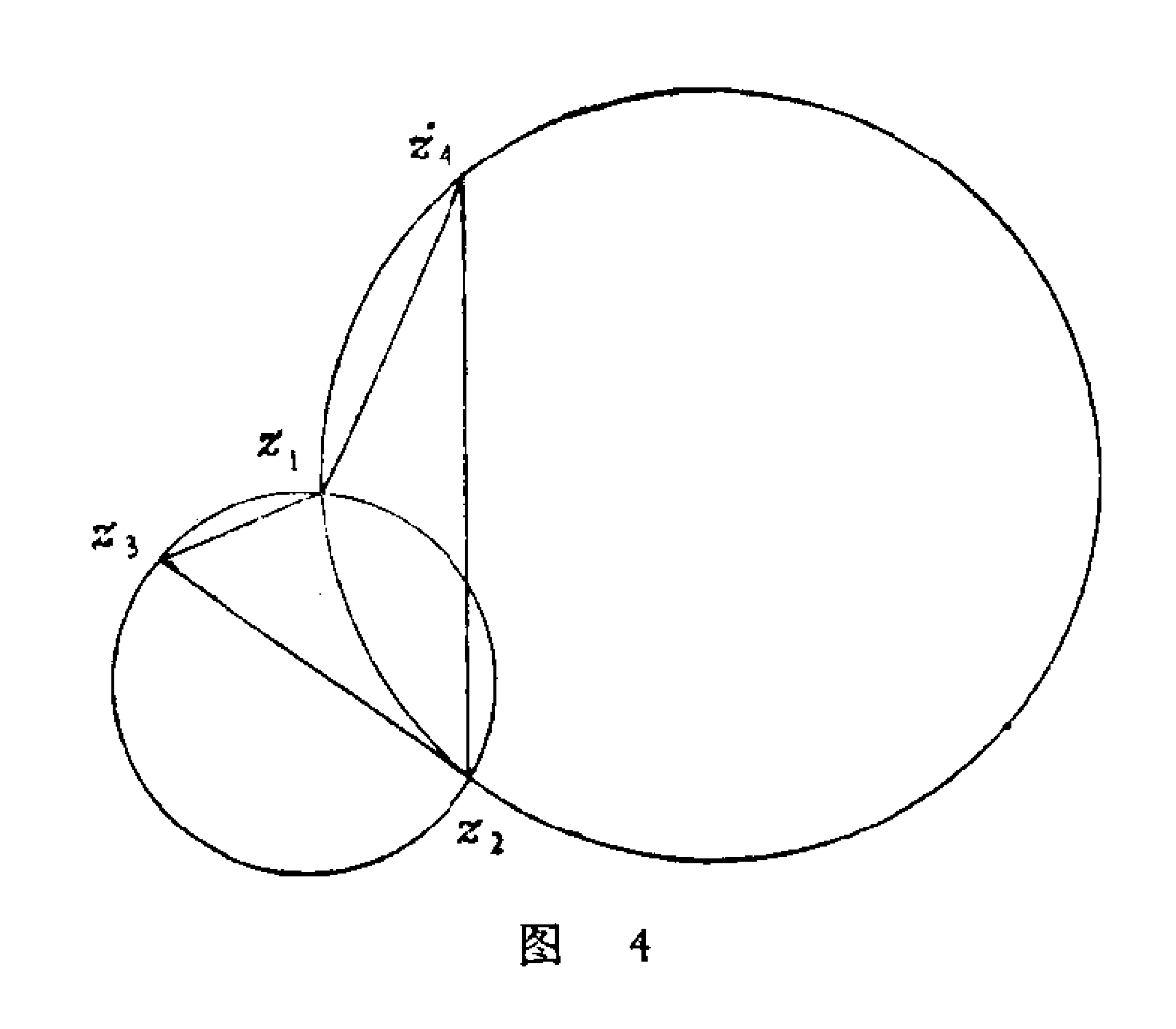


图 4

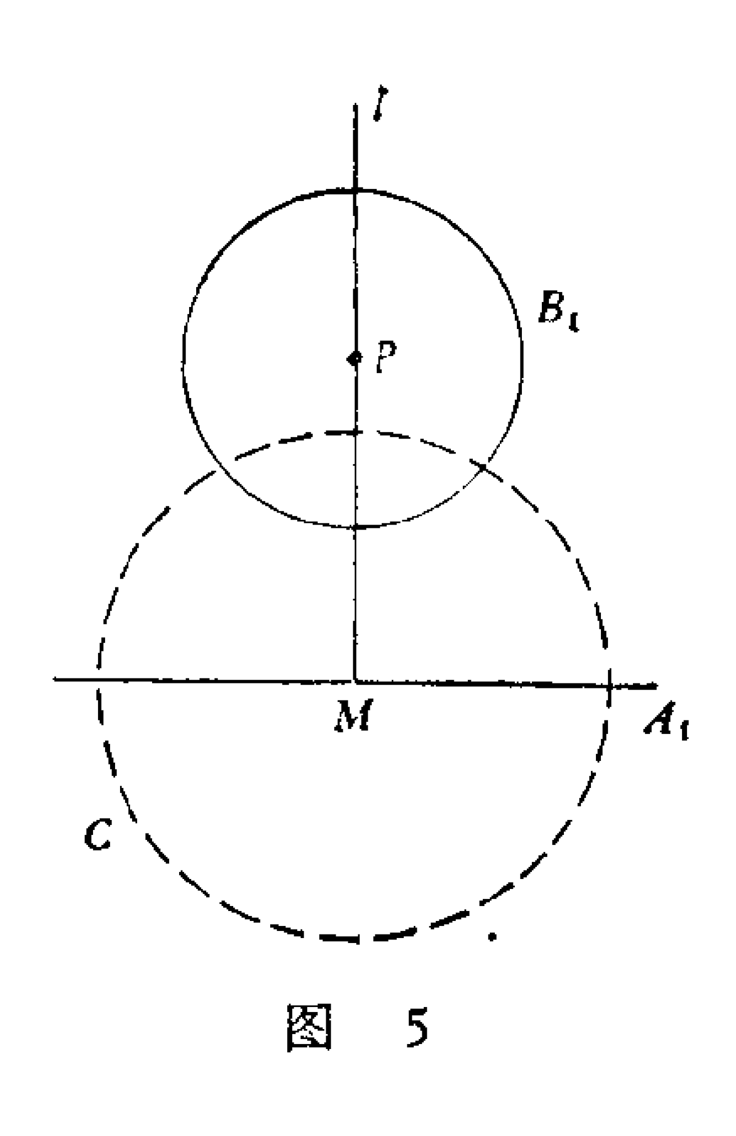


图 5

l 变为二直线(正交的)，A_1，B_1 变为与二直线正交的二个圆 A_2，B_2，因此 A_2，B_2 是同心圆．因此得

定理 3. 任意两个不交圆可以变为两个同心圆.

两个不交圆的不变量是什么？同心圆过圆心的直线交两圆于四点．这四点有交比．这交比就是不变量(注意虽然直线可以不同，但交比始终相等)，这一不变量可以改述为：两个不交圆 A，B，作一圆与 A，B 都正交，交出四点．这四点的交比，就是两个不交圆的唯一不变量.

附记 1. 两圆

$$\alpha(x^2+y^2)+2\beta x+2\gamma y+\delta=0,$$
$$\alpha_1(x^2+y^2)+2\beta_1 x+2\gamma_1 y+\delta_1=0$$

的中心各为 $\left(-\frac{\beta}{\alpha},-\frac{\gamma}{\alpha}\right)$，$\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1},-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)$，半径各为 $\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha\delta}{\alpha^2}}$，$\sqrt{\frac{\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\delta_1}{\alpha_1^2}}$．因此它们正交的条件是

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha\delta}{\alpha^2}+\frac{\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\delta_1}{\alpha_1^2}=\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2,$$

即

$$\alpha_1^2(\beta^2+\gamma^2-\alpha\delta)+\alpha^2(\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\delta_1)=(\alpha_1\beta-\beta_1\alpha)^2+(\alpha_1\gamma-\gamma_1\alpha)^2,$$

即

$$\alpha_1\delta+\alpha\delta_1=2\beta\beta_1+2\gamma\gamma_1. \tag{1}$$

这个正交条件是在 $\alpha\neq 0$，$\alpha_1\neq 0$ 的条件下推出来的．不难证明，当 $\alpha=0$ 或 $\alpha_1=0$ 时，它也代表两方程所定义的直线的正交性.

附记 2. 把条件 (1) 改写为

$$2\beta\beta_1+2\gamma\gamma_1-\alpha\delta_1-\delta\alpha_1=0.$$

命

$$Q=-2\beta\beta_1-2\gamma\gamma_1+\alpha\delta_1+\delta\alpha_1.$$

在 $\alpha=\alpha_1$，$\beta=\beta_1$，$\gamma=\gamma_1$，$\delta=\delta_1$ 时，则当 $Q>0$，$=0$，<0 原方程所对应的圆分别是虚，点，实.

§8. 圆 串 (Pencil)

定义. 给了两个圆 A，B．与 A，B 正交的圆成一集合，称为与 A，B 共轭的圆串.

定理 1. 圆串有一个参变数.

证．首先如果 A，B 相交．我们不妨假定 A，B 是以 O 为交点的直线，与此二直线正交的圆是以 O 为中心的任意圆，即以半径 R 为参变数的圆串.

其次，A，B 相切．不妨假定 A，B 是二平行的直线，与 A，B 正交的圆是所有的垂直于 A，B 的直线，也是一个参变数.

最后，A，B 不交．不妨假定 A，B 是二同心圆，垂直于 A，B 的圆是通过圆心的所有的直线，也是一个参变数.

定义. 这三类串各称为双曲的，抛物的，椭圆的.

在定理 1 的证明中实质上已经给出了串的标准型.

任何一个双曲串可以用线性变换变为"以原点为中心的所有的圆"其中包括两个点圆,一在原点,一在 ∞. 同时也可以推出双曲串中任二圆不相交. 两个点圆 P, Q 称为这串的极限点.

任何一个抛物串可以用线性变换,变为"平行于 x 轴的所有直线",以∞为切点. 因此抛物串的诸圆有一公切点,此点称为结点.

任何一个椭圆串可以用线性变换变为"过原点的所有的直线",每一直线过两点 0, ∞. 因此椭圆串的圆过两个定点.

因此,任何一个串可以变为以上三者之一. 由于椭圆串中任何两圆有二公共点,抛物串有一公共点,双曲串无公共点,因此,没有变换可以把一类性质的串变为另一类性质的串.

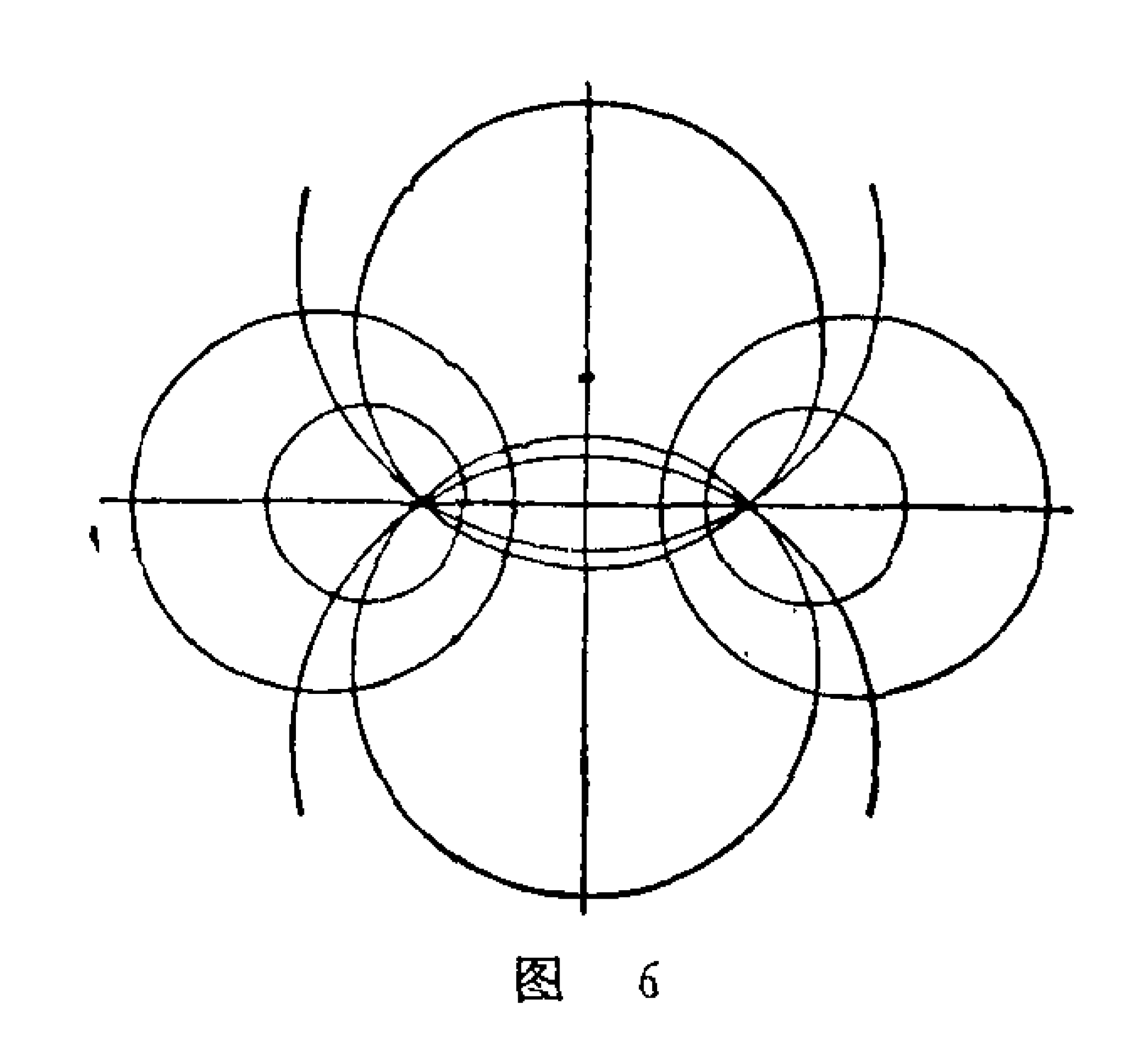


图 6

也显然可见,如果知道了一串中的两个圆,则这个串就唯一决定了.

由于"以原点为中心的圆"所成的串与"过原点的直线"所成的串是正交的(即一串中任一圆与另一串中任一圆正交),由此可以有椭圆串正交于一个双曲串. 同时有抛物串正交于一个抛物串,双曲串正交于一个椭圆串. 这样的串称为互相共轭(图 6).

由标准型可以看出: 给了平面上一点(除极限点和结点外),在串中有一个圆而且只有一个圆通过此点.

附记 1. 参数所活动的范围也各有不同的性质. 双曲串的参数与射线上的点一一对应(例如 $(0, \infty)$). 抛物串的参数与一直线上的点一一对应. 椭圆串的参数则与圆周上的点一一对应. 由此也可推出没有线性变换可以把不同类的串变来变去.

附记 2. 用矢量 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 表圆

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0,$$

则由两实圆 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 及 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ 所定义的圆串是由圆

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + \mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$$

所组成的. 这儿 λ, μ 是非同时为 0 的任意实数.

由此代数形式进行分类. 由二次型

$$(\lambda\alpha + \mu\alpha_1)(\lambda\delta + \mu\delta_1) - (\lambda\beta + \mu\beta_1)^2 - (\lambda\gamma + \mu\gamma_1)^2$$

入手,这个二次型可能有三种不同的情况: (i) 标签是+,-(双曲串),(ii) 降秩(抛物串),(iii) 定负(椭圆串).

§9. 圆 族 (Bundle)

现在研究三个圆 A, B, C 的问题. 假定它们没有公共交点.

若 A, B 无交点,我们有线性变换把 A, B 变为同心圆 A_1, B_1. 假定 C 也变为 C_1. 过 A_1, B_1 与 C_1 的中心作一直线,这直线正交 A_1, B_1 与 C_1 三圆. 因此在这种情况下,我们可以找到一圆与 A, B, C 三圆直交.

其次，若 A, B 相切，可找到一个线性变换把 A, B 易为二平行线 A_1, B_1. C 也因而变为 C_1. 由 C_1 的中心可以作一直线垂直于 A_1, B_1 因此，在这情况下也有一圆与 A, B, C 三圆正交.

最后，如果 A, B 有交点，则有线性变换把 A, B 变为两直线 A_1, B_1 相交于 O. 而 C 也同时变为 C_1. (i) O 在 C_1 之外，我们能够找到一个以 O 为中心而与 C_1 正交的圆. 也就是在这种场合下，有一圆同时正交三圆 A, B, C (图 7)；(ii) O 在圆 C_1 之内，以 O 为

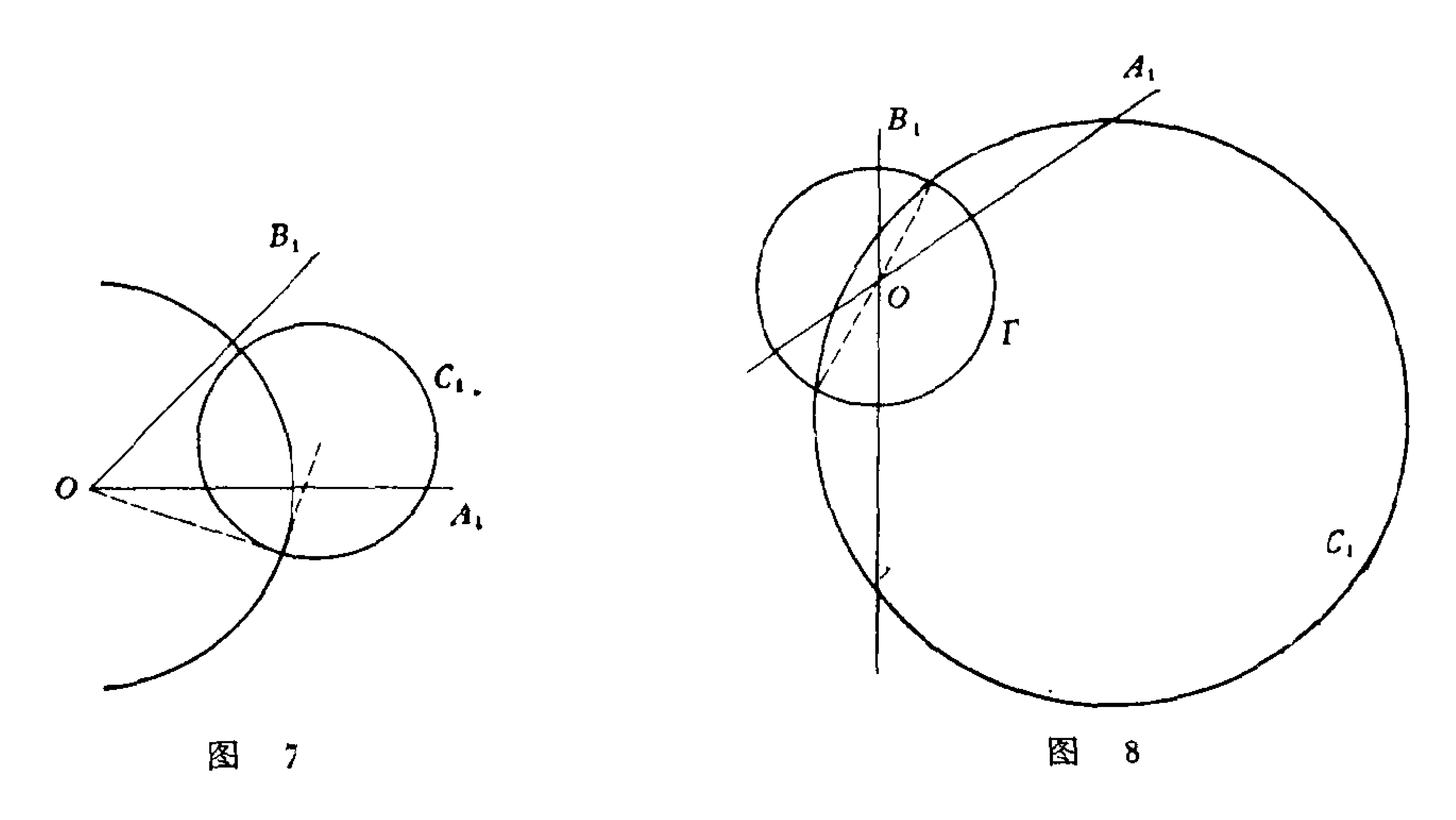


图 7　　图 8

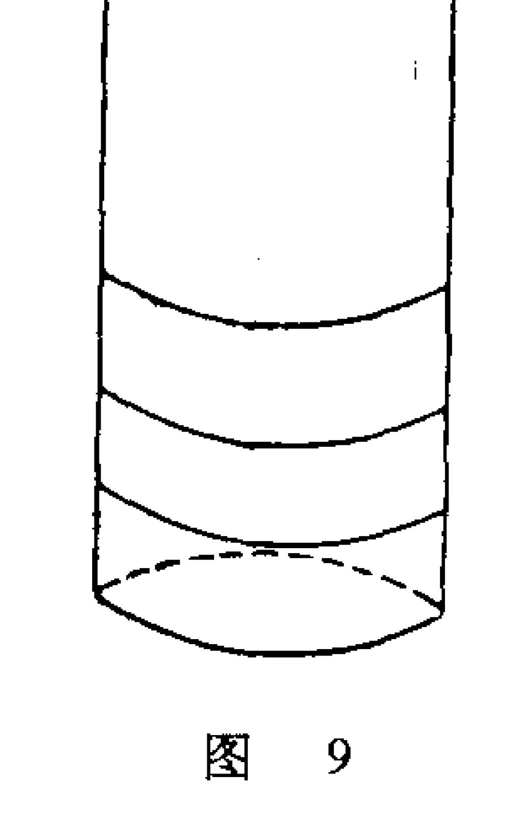
中心作一圆 Γ, 使 C_1 与 Γ 的交点在 Γ 的直径的两端(图 8). 因此有

定理 1. 射影平面上的三个圆一定是以下三种情况之一： (i) 有一公共点，(ii) 有一公共正交圆，(iii) 有一线性变换把这三圆变为交定圆 Γ 于 Γ 之直径两端的圆.

定义. 与一定圆正交的所有的圆所成的集合称为双曲的圆族. 过一定点的所有的圆所成的集合称为抛物的圆族. 而经过线性变换可以变为交定圆于其直径两端的所有的圆的集合称为椭圆的圆族.

这三种不同的圆族不可能用线性变换从其一变为另一. 其道理是：椭圆族中任意两个圆一定有两个交点，抛物族中两个圆可能有两个交点，也可能仅有一个交点，但并不存在两个圆无交点的，双曲族中存在有两个圆无交点的.

再看参数变化的情况. 双曲圆族所正交的圆不妨假定是 x 轴，这双曲圆族中的圆是中心在 x 轴上的圆. 圆心的位置与直线 $(-\infty, \infty)$ 相对应，而半径大小从 0 到 ∞，所以它是一个两个参数的系. 参数变化范围与半个平面有相同的情况. 抛物圆族，不妨假定其公共点是 ∞，这圆族中的圆是任意直线，所以有两个参数，变化范围与全平面相同. 椭圆族的定圆不妨假定是单位圆，它由过单位圆的直径的两端的圆所组成. 定圆直径的位置决定于它和 x 轴的夹角，圆的半径从 0 变到 ∞，因此是两个参变数的，并且可以半柱面表之(图 9).


图 9

定理 2. 如果圆族包有两个圆 A 与 B，它一定也有由 A, B 定出的圆串中的所有的圆.

证. 1) 如果是抛物族，即有一公共点 P. 无疑问，因为其中任意二圆 A, B 必有 P 为其公共点，而 A, B 串上之圆也一定过此公共点.

2）双曲族中如果一个圆正交 A 与 B，则也正交 A，B 所定义的串中之圆．

3）椭圆族由以下的初等几何定理推得之．如果 A，B 各交 Γ 于其直径之两端，则过 A，B 交点的圆也交 Γ 于其直径之两端．而这一定理已经在 § 5 中证明过了．

不难证明

定理 3. 命 P 是平面上的任一点．族中无穷个圆过 P 点，这些圆成一串（P 不是抛物族的共点）．

定理 4. 命 A，B，C 是一族中的三圆，不在同一串中者，D 为一第四圆，则我们可由 A，B，C 用逐步作串法得出 D 来．

证．在 D 上可以找到一点 P，它既不是串（A，B），（A，C）的极限点或共点，又不是 A 上的点．已知过 P 可以作一圆 E 属于串（A，B），作一圆 F 属于串（A，C）．由于 A，B，C 不在同一串中，E，F 不相同．由定理 3 可知 D 属于（E，F）串．

由此推得

定理 5. 一族由其中非同串的三个圆唯一决定．

以上所谈到的双曲族及抛物族的性质，是经线性变换而不变的．但椭圆族的定义并不是经过线性变换而不变．现在可以补足这个缺点．族可定义由不同串三圆连续作串所得出来的集合．双曲族抛物族的定义照旧，而椭圆族的定义可以改为族之非双曲与抛物者．

附记．命

$$\alpha_i(x^2+y^2)+2\beta_i x+2\gamma_i y+\delta_i=0,\quad i=1,2,3$$

代表三圆．由

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i)=0$$

所代表的诸圆称为圆族．试由此研究圆族及其分类等．

§ 10. Hermitian 方阵

现在我们概括地提一下用 Hermitian 方阵来处理圆串的方法，也可以说给 Hermitian 方阵的研究提供一些最简明的几何背景．

1）一个圆

$$\alpha z\bar{z}+h\bar{z}+\bar{h}z+\delta=0,\quad h=\beta+i\gamma \tag{1}$$

即

$$\alpha(x^2+y^2)+2\beta x+2\gamma y+\delta=0$$

对应于一个 Hermitian 方阵

$$H=\begin{pmatrix}\alpha & h\\ \bar{h} & \delta\end{pmatrix}. \tag{2}$$

但相差一个实数因子的 Hermitian 方阵代表同一圆（即如果有实数 $\lambda\neq 0$ 使 $H=\lambda H_1$，则 H，H_1 代表同一个圆）．

2）H 的行列式

$$\alpha\delta-|h|^2=\det(H)>0,\ =0,\ <0 \tag{3}$$

等价于它所代表的圆是虚圆、点圆或实圆．这个条件可以改写为：命

$$F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H})=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\bar{h} & \delta\\ -\alpha & -h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h & \delta\\ -\alpha & -\bar{h}\end{pmatrix}=2(|h|^2-\alpha\delta),$$

即得

$$\det H=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(FHF\bar{H}).$$

所以依

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H})<0,\ =0\ \text{或}\ >0 \tag{4}$$

而决定 H 代表虚圆、点圆或实圆．

3）经过变换

$$z\to\frac{az+b}{cz+d},\ P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \tag{5}$$

以 H 为方阵的圆变为以

$$\bar{P}'HP=\begin{pmatrix}|a|^2\alpha+\bar{a}ch+a\bar{c}\bar{h}+|c|^2\delta, & \bar{a}b\alpha+\bar{a}dh+b\bar{c}\bar{h}+d\bar{c}\delta\\ a\bar{b}\alpha+c\bar{b}h+a\bar{d}\bar{h}+\bar{d}c\delta, & b\bar{b}\alpha+\bar{b}dh+b\bar{d}\bar{h}+d\bar{d}\delta\end{pmatrix} \tag{6}$$

为方阵的圆．关系

$$H_1=\bar{P}'HP$$

就是我们所熟悉的“相抵关系”．取行列式 $\det H_1=|\det P|^2\det H$，故圆的虚实性不变．由 Hermitian 方阵的相抵理论可以知道，圆可变为以下三种之一：

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\text{虚}),\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(\text{点}),\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\text{实}).$$

4）正交条件．不难证明，两个圆 H, H_1 相正交的条件是

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H}_1)=0. \tag{7}$$

这个关系是经过相抵性而不变的，也就是

$$\operatorname{tr}(F(\bar{P}'HP)F(P'\bar{H}_1\bar{P}))=\operatorname{tr}((\bar{P}F\bar{P}')H(PFP')\bar{H}_1)=|\det P|^2\operatorname{tr}(FHF\bar{H}_1).$$

$$\left(\text{由于 } PFP'=\begin{pmatrix}s & t\\ u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & t\\ u & v\end{pmatrix}'=(\det P)F\right).$$

5）与一定圆 H_0 正交的诸圆称为一个圆族．也就是适合于

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H}_0)=0$$

的诸 Hermitian 方阵 H．这是一个线性关系，因此有两个参变数．由相抵的条件可知有三类不同的族，即以

$$H_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

分之，各为

$$\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & -\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & \alpha\end{pmatrix}. \tag{8}$$

这族是椭圆的，抛物的，双曲的.

6）因此在一族中可以找出三个圆 H_1, H_2, H_3, 使这族可以表成为

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3.$$

就 (8) 来说，椭圆族可以表为

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$

而抛物族可以表为

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$

而双曲族可以表为

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}.$$

（读者试指出 α, β, γ 适合何种关系，才是实圆.）

7）给两个定圆 H_1 与 H_2. 形如

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$$

的圆成一圆串. 如果一个圆与 H_1 正交与 H_2 正交，则与圆串中的任一圆也正交. 由

$$\operatorname{tr}(FHF\overline{H}_1) = \operatorname{tr}(FHF\overline{H}_2) = 0$$

可知H的元素适合两个线性关系. 因此是有一个参变数的，即可知有二圆 $H^{(1)}$ 与 $H^{(2)}$ 使 H 可以表为

$$\mu_1 H^{(1)} + \mu_2 H^{(2)}.$$

这是一个圆串.

8）研究圆串中点圆的个数，即求

$$\operatorname{tr}(F(\lambda H_1 + \mu H_2)F(\lambda\overline{H}_1 + \mu\overline{H}_2)) = 0$$

的解. 这是一个二次方程式，共有三种情况：(i) 有二实解，(ii) 有一实解（即重根），(iii) 无实解. 不难证明他们各对应于双曲，抛物，椭圆串，并可以用相抵关系各变为

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ \text{(二个点圆，双曲串)},\tag{i}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{(平行线，抛物串)},\tag{ii}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\ \text{(过原点的直线，椭圆串)}.\tag{iii}$$

并且 (i) 与 (iii) 正交，(ii) 与 $\lambda\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ 正交. 极易看出给了一个串（椭圆，抛物，双曲）则存在唯一的串（双曲，抛物，椭圆）与之正交.

9）圆族中经一点（它不是抛物族的公共点）的诸圆成一圆串这是显然的事实，由于“经一点”与正交一“点圆”等同.

对一圆族来说，也可以考虑

$$\operatorname{tr}(F(\lambda H_1 + \mu H_2 + \nu H_3)F(\lambda\overline{H}_1 + \mu\overline{H}_2 + \nu\overline{H}_3)),$$

它是一个二次型. 可以看出三种情况：(i) 有唯一点圆，(ii) 有无穷个点圆，(iii) 无点

圆，不难证明各相抵于以下诸例.

例 1. $H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, 二次型是 $-\mu^2-\nu^2$. 如果 $\mu^2+\nu^2=0$, 则 $\mu=\nu=0$, 即得一个点圆 H_1 (抛物).

例 2. $H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, 二次型是 $-\lambda^2+\mu^2+\nu^2$, $\lambda^2=\mu^2+\nu^2$, 有无数个解(双曲).

例 3. $H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, 二次型是 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2$, $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0$, 即得 $\lambda=\mu=\nu=0$, 故无点圆(椭圆).

这三个例就是 6) 中的三例，因此结论已明.

10) 因此椭圆族中仅能有椭圆串(无点圆)，抛物族中仅有椭圆串与抛物串(而且一定有)，双曲族中有三类串.

读者不妨以此方法来推出上文的一切结果.

§11. 变形分类

变形

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的不变点(或称不动点)适合于二次方程

$$cz^2+(d-a)z-b=0. \tag{1}$$

如果 (1) 的系数都等于 0，则得 $w=z$, 即恒等变形，任何一点都不变.

若 $c\neq 0$, 则 (1) 有二根,

$$z_i=\frac{a-d\pm\sqrt{D}}{2c},\ D=(d-a)^2+4bc.$$

视 $D=0$ 或 $\neq 0$，我们有一个或两个不变点. 下面我们分别讨论 $c=0$ 和 $c\neq 0$ 的情况.

1) 若 $c=0$, $d-a=0$, 则只有一个不变点 ∞. 仅有∞为不变点的变形是

$$w=z+k, \tag{2}$$

这就是平移.

若 $c=0$，而 $d-a\neq 0$, 则我们可以看成为两个不变点，一个是 ∞, 一个是$\frac{b}{d-a}$.

而命

$$w_1=w-\frac{b}{d-a},\ z_1=z-\frac{b}{d-a},$$

得

$$w_1=\frac{a}{d}z_1.$$

2) 如果 $c\neq 0$, $D=0$, 则 $g=z_1=z_2=\frac{a-d}{2c}$. (1) 变为

$$\frac{1}{w-g}=\frac{1}{z-g}+\frac{2c}{a+d}.$$

命 $w_1=\frac{1}{w-g}$，$z_1=\frac{1}{z-g}$，则仍然得出 (2) 来. 由此 (2) 是仅有一个不变点的变形的标准型.

如果 $c\neq 0$，$D\neq 0$，则命

$$w'=\frac{w-z_2}{w-z_1},\quad z'=\frac{z-z_2}{z-z_1}.$$

不变点变为 0 与 ∞. 因而也得

$$w'=\rho z'. \tag{3}$$

对应于 $z=\infty$，我们有 $w=\frac{a}{c}$ 及 $z'=1$. 故由上式

$$\rho=w'=\frac{a-cz_2}{a-cz_1},$$

即得

$$\rho=\frac{a+d+\sqrt{D}}{a+d-\sqrt{D}}. \tag{4}$$

以上所做的是把线性变换 $w=f(z)$ 的两个变数经过同一变换的结果. 即命 $w=g(w_1)$，$z=g(z_1)$. 它的几何意义是原来在 z 平面上有一变换 Γ，现在把 z 平面变为 z_1 平面，在 z_1 平面上变换 Γ 所变成的新变换. 代数形式是：如果原变换的方阵是 M，而变换 g 的方阵是 P，则我们新变换的方阵是

$$M_1=P^{-1}MP.$$

两方阵是相似的. 相似性是等价关系，因此可把线性变换分类.

定义. 如果线性变换只有一个不动点，则称为抛物型的变换. 假设线性变换有两个不动点，如果由 (4) 定义的 ρ 是实的，则称为双曲型的，如果 ρ 的绝对值等于 1，则称为椭圆的，如果 ρ 是一般复数，则称为等纬型的. ρ 称为乘数.

ρ 的几何意义是什么？它等于下列四点的交比. 这四点是二个不动点，原来的 z，与其映象 w. 更明确些

$$\rho=(z_1, z_2, z, w).$$

特别是 $z_1=\infty$，$z_2=0$，$w=\rho z$，得 $(\infty, 0, z, \rho z)=\rho$.

ρ 的代数意义是什么？它是M的两个特征根的比值.

注意，$\frac{1}{\rho}=(z_2, z_1, z, w)$，而且 $\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{z}\right)$. 由此可知，如果 $\lambda\neq\rho$ 及 $\frac{1}{\rho}$，则 λ 所对应的线性变换一定不相似于 ρ 所对应的线性变换. 因此二线性变换相似的必要且充分条件是它们的系数相等或互为倒数.

另一方面抛物型变换 $w=z+k$，可以变为 $\left(\frac{w}{k}\right)=\left(\frac{z}{k}\right)+1$. 因此任何一个抛物型变换都可以变为 $w=z+1$，即任意两个抛物型变换都是相似的.

经椭圆，抛物，双曲变形而不变的圆成一双曲串，抛物串与椭圆串. 要证明这点并不困难，这只要从 $w=z+1$ 使所有的平行于实轴的直线不变，$w=e^{i\theta}z$ 使以原点为中心的圆不变，$w=kz$ 使通过原点的直线不变，而且无其他的不变圆即可看出.

§12. 广义线性群

定义. 在线性群中再添上一变换

$$w=\bar{z}, \tag{1}$$

这样所演出的群称为广义线性群.

因此,广义线性群中除线性变换外,还有形如

$$w=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d) \tag{2}$$

的变换. 不难证明,除此之外便没有了. 圆是由实交比定义的,因此广义线性变换还是把圆变为圆.

如果

$$w_1=(a_1\bar{w}+b_1)/(c_1\bar{w}+d_1),$$

则得

$$\begin{aligned} w_1 &= (a_1(\bar{a}z+\bar{b})+b_1(\bar{c}z+\bar{d}))/(c_1(\bar{a}z+\bar{b})+d_1(\bar{c}z+\bar{d})) \\ &= ((a_1\bar{a}+b_1\bar{c})z+a_1\bar{b}+b_1\bar{d})/((c_1\bar{a}+d_1\bar{c})z+c_1\bar{b}+d_1\bar{d}). \end{aligned}$$

其方阵等于

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

即两个形如 (2) 的变换之积是一个线性变换.

习题. 任何一个 (2) 添到线性变换群中都与 (1) 有同样的作用.

现在考虑 (2) 的不变点. (2) 的不变点适合于

$$cz\bar{z}+dz-a\bar{z}-b=0. \tag{3}$$

由 (3) 推得

$$\bar{c}z\bar{z}+\bar{d}\bar{z}-\bar{a}z-\bar{b}=0.$$

因而得出两个圆

$$\begin{cases} (c+\bar{c})z\bar{z}+(d-\bar{a})z+(\bar{d}-a)\bar{z}-b-\bar{b}=0, \\ (c-\bar{c})z\bar{z}+(d+\bar{a})z+(\bar{d}+a)\bar{z}-b+\bar{b}=0. \end{cases} \tag{4}$$

因此,一般说来,它使这两圆的交点不变并且把由这两圆定义的圆串变为自己. 特别情况是 $c=\bar{c}$, $b=\bar{b}$. $d=-\bar{d}$ 即 (4) 并不是两圆,而只定义一个. 则此变形变为

$$w=\frac{-h\bar{z}-\delta}{\alpha\bar{z}+\bar{h}}, \qquad \alpha,\ \delta \text{ 实数}. \tag{5}$$

这变换有不变圆

$$\alpha w\bar{w}+\bar{h}w+h\bar{w}+\delta=0. \tag{6}$$

连用两次 (5), 得

$$u=\frac{-h\bar{w}-\delta}{\alpha\bar{w}+h}=\frac{-h(-\bar{h}z-\delta)-\delta(\alpha z+h)}{\alpha(-\bar{h}z-\delta)+\bar{h}(\alpha z+h)}=z.$$

即全等变换.

这样的变换定义为反演,圆(6)称为这一反演的基圆,连行两次反演即得全等变换.它的几何意义如下: 先看最简单的反演 $w=\bar{z}$, 它以 x 轴为镜子, 把上半平面的点变为下

半平面以 x 轴为对称轴的点．因此，反演也称为对称，依基圆对称．

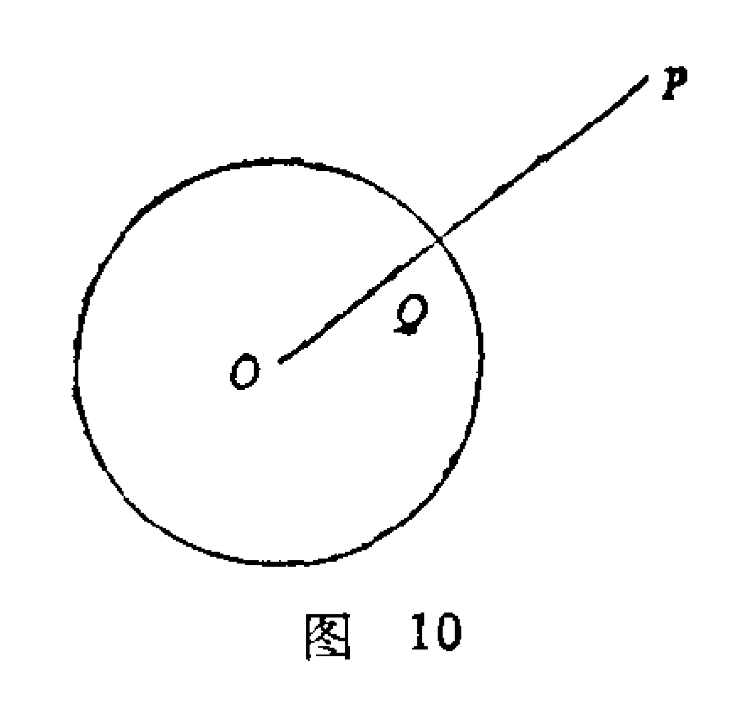


图 10

(6) 可以是实圆或虚圆．把任一实圆变为 $z\bar{z}=1$，反演简化为

$$w=\frac{1}{\bar{z}}. \tag{7}$$

它的几何意义是：任一点 $P(z=\rho e^{i\theta})$ 变为 $Q\left(\frac{1}{\rho}e^{i\theta}\right)$，即由直线 OP 上取一点 Q，使 $OP\cdot OQ=1$（图 10）．读者不难看出以任一圆为基圆的反演．

由虚圆得出的反演是

$$w=-\frac{1}{\bar{z}}. \tag{8}$$

定理 1. 任何一个线性变换一定可以依四个实圆作反演得出．

证．只要考虑

$$w=z+1,\ w=\rho e^{i\theta}z$$

即是．

1) 抛物型．$w=z+1$ 是 $w=-\bar{w}_1$，$w_1=-\bar{z}-1$ 之积．前者是对 y 轴的反演，后者是 $\left(w_1+\frac{1}{2}\right)=-\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)$，是对 $x=-\frac{1}{2}$ 的反演．"$x=0$" 与 "$x=-\frac{1}{2}$" 是两个相切的圆．因此任何一个抛物变换可以表为对两个相切圆的反演之积（属于一个抛物串的二圆）．

2) 双曲型．$w=\rho z$ 是 $w=\frac{1}{\bar{w}_1}$，$w_1=\frac{1}{\rho\bar{z}}$ 之积．它们是依圆 $z\bar{z}=1$，$z\bar{z}=\frac{1}{\rho}$ 的两个反演，它们是同心圆．因此，双曲变换是依不相交的圆反演出来的（双曲串的二圆）．

3) 椭圆型．$w=e^{i\theta}z$，$w=e^{\frac{1}{2}i\theta}\bar{w}_1$，$w_1=e^{-\frac{1}{2}i\theta}\bar{z}$，它们是以二过原点的直线的反演．因而，椭圆变换是依两个相交圆反演出来的（椭圆串中的二圆）．

4) 等纬型．即 $w=\rho e^{i\theta}z$．把等纬型写为 $w=\rho w_1$，$w_1=e^{i\theta}z$ 之积，因而得出定理．

上定理的证明包括了更多的内容，不难推出以下的定理．

定理 2. 椭圆，抛物，双曲变换可由两个反演得之．

定理 3. 从一个椭圆（或抛物或双曲）串中任二圆作反演得出的线性变换是椭圆的（或抛物的或双曲的），所有的这些变换成一群（这群是一个参数的群）．

证．先以抛物串

$$y=k,\qquad k\text{实数}$$

为例．$w=\bar{z}+2k_1i$，$w=\bar{z}+2k_2i$ 分别是以 $y=k_1$，$y=k_2$ 的两个反演．其积是

$$w=z+2(k_1-k_2)i.$$

即得出所有形如 $w=z+ki$ 的变形．这些变形成一分群，这分群与"实数的加法群"相同．

再讨论椭圆串 $y=x\operatorname{tg}\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$．

$$w=e^{2i\theta}\bar{z}$$

是以 $y=x\operatorname{tg}\theta$ 为基圆的对称．$w=e^{2i\theta}\bar{z}$，$w=e^{2i\theta_1}\bar{z}$ 之积的形式是 $w=e^{it}z$．这些变

换成一分群，这分群与"绝对值＝1 诸数的乘法群"相同.

最后讨论双曲串 $z\bar{z}=\rho^2$. 变形 $w=\frac{\rho^2}{\bar{z}}$, $w=\frac{\rho_1^2}{\bar{z}}$ 之积为 $w=\frac{\rho^2}{\rho_1^2}z$. 即得形如 $w=kz(k>0)$ 的变换，这群与"正实数的乘法群"相同.

§ 13. 射影几何的基本定理

定理 1. 任何一个连续变换如果把一维射影(复)空间一一对应地变为其自己，并且使调和点列变为调和点列，一定是一个广义线性变换.

证. 假定

$$w=f(z)$$

是这样的一个变换. 由于线性变换可以把任意三点变为任意三点，因此我们不妨假定

$$0=f(0),\ 1=f(1),\ \infty=f(\infty).$$

由

$$(\infty,\ z_2,\ z_3,\ z_4)=-1$$

可知 $z_2=\frac{1}{2}(z_3+z_4)$. 因此，如果 $w_3=f(z_3)$, $w_4=f(z_4)$, 则

$$\frac{1}{2}(w_3+w_4)=f\left(\frac{1}{2}(z_3+z_4)\right).$$

即对任二复数 a, b 常有

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right).$$

由 $b=0$ 得, $f(a)=2f\left(\frac{1}{2}a\right)$. 因此由上式推得

$$f(a)+f(b)=f(a+b).$$

特别对任一自然数 n, $f(n)=nf(1)=n$. 又由 $f(-n)+f(n)=f(0)=0$, 可知 $f(-n)=-f(n)$. 又由 $pf\left(\frac{n}{p}\right)=f(n)=n$, 可知 $f\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{n}{p}$. 即对任一有理数 r, 常有 $f(r)=r$. 由连续性可知对任一实数 x, $f(x)=x$.

命 $f(i)=j$. 由于 $(1,-1,i,-i)=\left(\frac{i-1}{1+i}\right)^2=-1$, 可知 $(1,-1,j,-j)=-1$. 即得

$$\frac{j-1}{-1-j}\Big/\frac{-j-1}{-1+j}=-1,$$

即 $j^2=-1$. 故 $f(i)=i$, 或 $f(i)=-i$.

如果 $f(i)=i$, 则同法可证: 对任一有理数 r, $f(ri)=ri$; 对任一实数 y, $f(yi)=yi$. 因此

$$f(x+yi)=f(x)+f(yi)=x+yi.$$

即

$$f(z)=z.$$

如果 $f(i)=-i$, 则对任一实数 y, $f(iy)=-iy$, 因而

$$f(z)=\bar{z}.$$

即得所证.

第二章 非欧几何学

§1. 欧几里得几何学(抛物几何学)

考虑一个抛物圆族，不妨假定它是由过∞的诸圆所成的族，即所有的直线所成的族. 我们现在考虑依此族中诸圆(即直线)所得出的反演所演出的群.

考虑反演

$$w = e^{i\theta}\bar{z} + ie^{\frac{1}{2}i\theta}\lambda, \qquad \lambda \text{ 实数} \tag{1}$$

(不难直接证明它是反演)，这反演的不变圆是

$$\frac{1}{i}(ze^{-\frac{1}{2}i\theta} - \bar{z}e^{\frac{1}{2}i\theta}) = \lambda,$$

即

$$y\cos\frac{1}{2}\theta - x\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{\lambda}{2}.$$

这是一般的直线，即当 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$\lambda$ 实数，则(1)代表了对这些抛物圆族的所有可能的反演. 两个反演之积

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\psi}\bar{w} + ie^{\frac{1}{2}i\psi}\tau = e^{i\psi}(e^{-i\theta}z - ie^{-\frac{1}{2}i\theta}\lambda) + ie^{\frac{1}{2}i\psi}\tau \\ &= e^{i(\psi-\theta)}z + ie^{\frac{1}{2}i\psi}\tau - ie^{i(\psi-\frac{1}{2}\theta)}\lambda, \end{aligned} \tag{2}$$

它的形式是

$$w = e^{i\theta}z + q, \qquad q \text{ 复数}. \tag{3}$$

反之，前已证明形如(3)的变形可以表为二反演之积. 因此，由抛物圆族出发得一个群，其中的变换或是(3)，或是 $w = \bar{z}$，或是二者之积. 我们看看(3)的几何意义. $w = e^{i\theta}z$ 是旋转，$w = z + q$ 是平移，因此(3)所表示的就是刚体运动，而 $w = \bar{z}$ 是反演，这样所得出的群称为欧几里得群.

在平面上，在此群下的几何学就是普通的欧几里得几何学.

所以欧几里得几何学可以看成为由抛物族所引出来的几何学.

欧氏几何学有以下的一些重要性质:

(i) 这空间是可递的，即任一点可以变为另一点.

(ii) 两点间的距离是唯一不变量，即如果 A, B 间与 C, D 间的距离相等，则有一变形把 A, B 变为 C, D.

(iii) 直线变为直线(即抛物族中的圆仍然变为此族的圆).

(iv) 两直线的夹角是唯一不变量.

(v) 过二点可以作一(唯一的)直线.

(vi) 过一点可以作一(唯一的)直线与一给定的直线平行.

附记. 再看变形(3). 如果 $\theta \neq 0$，则

$$w - a = e^{i\theta}(z - a), \quad a = q/(1 - e^{i\theta})$$

是一个以 a 为不变点的椭圆变形,也就是绕 a 旋转的变形. 如果 $\theta=0$, 则得平移——抛物变形. 因此,在欧几里得几何中没有双曲变形.

§2. 球面几何学(椭圆几何学)

考虑一个椭圆圆族,不妨假定它就是交单位圆于直径两端的圆所组成的. 交单位圆于 $\pm e^{i\theta}$ 的圆的方程式是

$$\alpha(z\bar{z}-1)-i\lambda e^{i\theta}\bar{z}+i\lambda e^{-i\theta}z=0. \tag{1}$$

这儿 α, λ, θ 是实参变数. (1) 代表整个的椭圆族,对应于圆 (1) 我们有反演

$$w=(i\lambda e^{i\theta}\bar{z}+\alpha)/(\alpha\bar{z}+i\lambda e^{-i\theta}), \tag{2}$$

行列式等于 $-\alpha^2-\lambda^2$. 分子分母同除以 $i\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}$, 命

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}=\sin\tau,\quad \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}=\cos\tau,$$

则得变形

$$w=(\bar{z}e^{i\theta}\cos\tau-i\sin\tau)/(-i\bar{z}\sin\tau+e^{-i\theta}\cos\tau). \tag{3}$$

这个变形的行列式等于 1. 假定还有一反演

$$z=e^{2i\psi}\bar{z}_1, \tag{4}$$

则其乘积等于

$$w=(z_1e^{i(\theta-\psi)}\cos\tau-ie^{i\psi}\sin\tau)/(-iz_1e^{-i\psi}\sin\tau+e^{-i(\theta-\psi)}\cos\tau). \tag{5}$$

这变形的方阵是

$$M=\begin{pmatrix} e^{i(\theta-\psi)}\cos\tau & -ie^{i\psi}\sin\tau \\ -ie^{-i\psi}\sin\tau & e^{-i(\theta-\psi)}\cos\tau \end{pmatrix}. \tag{6}$$

这是一个行列式等于 1 的酉方阵(即 $M\bar{M}'=I$), 简称为特殊酉方阵. 反之,任一行列式等于 1 的酉方阵一定可以表为以上的形式. 它的证明如下: 如果

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$|a|^2+|b|^2=1,\ a\bar{c}+b\bar{d}=0,\ |c|^2+|d|^2=1,\ ad-bc=1,$$

适合第一个式子的一般解是 $a=e^{i(\theta-\psi)}\cos\tau$, $b=-ie^{i\psi}\sin\tau$. 由第二式 $c=-\bar{d}t$, $d=\bar{a}t$, 由 $ad-bc=(|a|^2+|b|^2)t=1$, 得到 $t=1$, 所以

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|b|^2=1. \tag{7}$$

因而得出表达式 (6).

定理 1. 由一个椭圆族的圆经反演而得出的群是特殊酉群 (但需注意 $\pm M$ 仅表一个变换).

附记. (7) 式表示酉方阵与四元数的关系. 命 $m=a+bj$ 表一四元数. 由 $|a|^2+|b|^2=1$, 可知 $|m|=1$. 如果 $m_1=a_1+b_1j$, 则 $mm_1=aa_1-b\bar{b}_1+(ab_1+b\bar{a}_1)j$. 这也表示乘积 MM_1. 因此特殊酉群可以表为单位四元数的乘法群.

再看反演 (2) 在 Neumann 球上的意义. 对应于圆 (1), 我们有平面

$$\alpha\zeta+\lambda\xi\sin\theta-\lambda\eta\cos\theta=0. \tag{8}$$

这是一个过球心的平面，在球面上表一大圆.

定理 2. 反演 (2) 在 Neumann 球上表示一个依平面 (8) 而对称的变换.

证. 如果我们能够证明 $\theta=0$ 时的情况，便由平面旋转可以推出一般的情况. 这时平面 (8) 变为

$$\zeta\sin\tau-\eta\cos\tau=0. \tag{9}$$

变形 (3) 变为

$$w=(\bar{z}\cos\tau-i\sin\tau)/(-i\bar{z}\sin\tau+\cos\tau). \tag{10}$$

由此得

$$1+|w|^2=\frac{1+|z|^2}{|iz\sin\tau+\cos\tau|^2}.$$

命 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则

$$\begin{aligned} w&=\frac{(\bar{z}\cos\tau-i\sin\tau)(iz\sin\tau+\cos\tau)}{|-i\bar{z}\sin\tau+\cos\tau|^2}\\ &=\frac{i(z\bar{z}-1)\sin\tau\cos\tau+\bar{z}\cos^2\tau+z\sin^2\tau}{|-i\bar{z}\sin\tau+\cos\tau|^2}.\end{aligned}$$

由此可知

$$u=\frac{x}{|iz\sin\tau+\cos\tau|^2},\quad v=\frac{(z\bar{z}-1)\sin\tau\cos\tau-y(\cos^2\tau-\sin^2\tau)}{|iz\sin\tau+\cos\tau|^2}.$$

因此

$$\frac{2u}{1+|w|^2}=\frac{2x}{1+|z|^2},\quad \frac{2v}{1+|w|^2}=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\sin2\tau-\frac{2y}{1+|z|^2}\cos2\tau,$$

$$\begin{aligned}\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}&=\frac{1}{1+|z|^2}(1+|z|^2-2|iz\sin\tau+\cos\tau|^2)\\ &=\frac{1}{1+|z|^2}(1+|z|^2-2|z|^2\sin^2\tau-2\cos^2\tau+4y\sin\tau\cos\tau)\\ &=\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\cos2\tau+\frac{2y}{1+|z|^2}\sin2\tau.\end{aligned}$$

在球上，假定 ξ,η,ζ 对应于 z, ξ',η',ζ' 对应于 w, 则得

$$\begin{aligned}\xi'&=\xi,\\ \eta'&=-\eta\cos2\tau+\zeta\sin2\tau,\\ \zeta'&=\eta\sin2\tau+\zeta\cos2\tau.\end{aligned}$$

(ξ_1,η_1,ζ_1) 与其映象 (ξ_2,η_2,ζ_2) 的中点 $\left(\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2),\ \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2),\ \frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_2)\right)$ 一定在 (9) 上. 此点可以直接验算出来，即

$$\begin{aligned}&\sin\tau(\zeta_1+\eta_1\sin2\tau+\zeta_1\cos2\tau)-(\eta_1-\eta_1\cos2\tau+\zeta\sin2\tau)\cos\tau\\ &\quad=\zeta_1(\sin\tau+\sin\tau\cos2\tau-\cos\tau\sin2\tau)\\ &\qquad+\eta_1(-\cos\tau+\sin\tau\sin2\tau+\cos\tau\cos2\tau)=0.\end{aligned}$$

即 (ξ_1,η_1,ζ_1) 与 (ξ_2,η_2,ζ_2) 依平面 (9) 而对称.

定理 3. 连续两个反演的结果在 Neumann 球上表示一个旋转，其旋转轴的两端对应于两个反演的基圆的交点.

证. 椭圆族中二圆定有二交点. 这二点是经此二反演的不变点. 由于基圆是大圆，二不变点在球面上一定是直径的两端. 这二反演变为依通过此直径两平面求对称而得的变换. 在任一垂直于直径的平面上看，图形是: 有两条相交直线，对之各反演一次，其结果是一旋转，假定二直线 l_1, l_2 的交角为 τ. 原来位置是 m_1 上的一点 P_1, m_1 与 l_1 的夹角是 θ, 对 l_1 反演后得 m_2 上的一点 P_2. m_2 与 l_2 的夹角等于 $\tau-\theta$. 对 l_2 反演得 m_3, m_3 与 m_1 的夹角是 2τ.

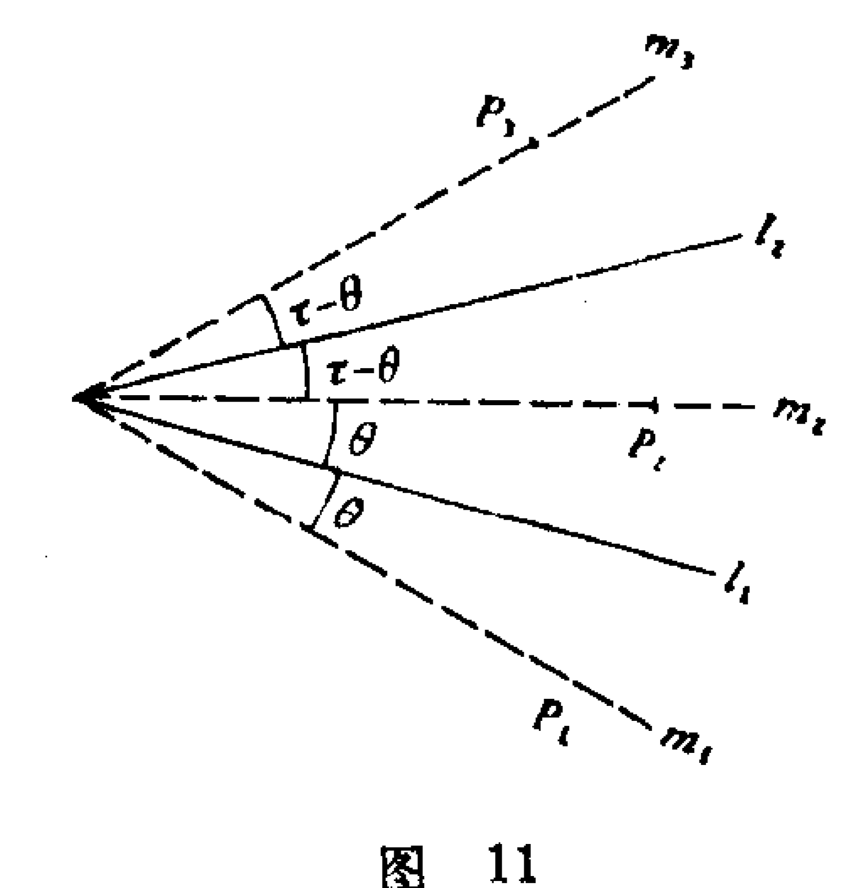


图 11

不难证明，任何一个旋转也可以用此法得之. 因此，椭圆几何也就是在旋转群下的球面几何学.

附记 1. 注意: $M\bar{M}'=I$ 也可以申述为变换使虚圆 $z\bar{z}+1=0$ 变为其自己.

附记 2. 椭圆几何中的变形都是椭圆的. 原因是其变换的不变圆成一圆串，而且是双曲的.

§3. 椭圆几何的一些性质

不难证明椭圆几何有以下一些性质:

(i) 这空间是可递的.

(ii) 两点间有以下的唯一不变量. 对应于这两点在 Neumann 球上有两点，通过这两点与球心各做一矢量(但注意 θ 与 $2\pi-\theta$ 可能是同一的)，这矢量的夹角是不变量.

(iii) 椭圆族中的圆仍然变为此族之圆，此圆称为测地线(或迳称直线).

(iv) 两测地线的夹角是唯一不变量.

(v) 过两点(除去对应于 Neumann 球的直径两端的情况)，有唯一的测地线.

(vi) 过一点不能作一测地线与一给定的测地线不相交.

§4. 双曲几何 (Лобачевский 几何)

考虑一个双曲圆族，不失去普遍性我们假定这族是由正交于单位圆诸圆所成的. 由正交条件得 $\alpha-\delta=0$, 所以圆的形式是

$$\alpha z\bar{z}+h\bar{z}+\bar{h}z+\alpha=0, \quad |h|^2-\alpha^2>0. \tag{1}$$

所对应的反演是

$$w=(-h\bar{z}-\alpha)/(\alpha\bar{z}+\bar{h}). \tag{2}$$

由

$$\begin{aligned}1-w\bar{w}&=[(\alpha\bar{z}+\bar{h})(\alpha z+h)-(-h\bar{z}-\alpha)(-\bar{h}z-\alpha)]|\alpha\bar{z}+\bar{h}|^{-2}\\&=(1-z\bar{z})|\alpha\bar{z}+\bar{h}|^{-2}(|h|^2-\alpha^2),\end{aligned}$$

可见反演(2)把单位圆内 ($|z|<1$) 变为单位圆内 ($|w|<1$), 圆周变为圆周，圆外变为圆外.

显然 $|h|>\alpha$. 命 $a=-\dfrac{\alpha}{h}$ (圆内一点)及 $-h/\bar{h}=e^{i\theta}$, 则 (2) 变为

$$w = e^{i\theta}(\bar{z} - a)/(-\bar{a}\bar{z} + 1). \tag{3}$$

再进行一次变换，$z \to \bar{z}$，则得线性变形

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \tag{4}$$

这一变形把单位圆变为单位圆，把圆内一点 $z = a$ 变为 $w = 0$. 不难证明，任意两个反演之积也是一个使单位圆不变的线性变换.

反过来，我们证明，凡使单位圆不变的线性变换一定是(4)的形式. 假定 $w = (az + b)/(cz + d)$ 是这样的一个变换，把圆

$$|az + b|^2 - |cz + d|^2 = 0$$

变为单位圆，这圆

$$(|a|^2 - |c|^2)z\bar{z} + (a\bar{b} - c\bar{d})z + (\bar{a}b - \bar{c}d)\bar{z} + |b|^2 - |d|^2 = 0$$

是单位圆的充分且必要的条件是 $a\bar{b} - c\bar{d} = 0$ 及 $|a|^2 - |c|^2 = -(|b|^2 - |d|^2) \neq 0$. 由前式可知 $a = \bar{d}t$, $c = \bar{b}t$, 代入后式得 $(1 - |t|^2)(|b|^2 - |d|^2) = 0$, 即 $|t| = 1$. 代入原来的变形中得

$$w = (\bar{d}tz + b)/(\bar{b}tz + d) = \frac{\bar{d}t}{d}\left(z + \frac{b}{\bar{d}t}\right)\Big/\left(\frac{\bar{b}t}{d}z + 1\right).$$

由于 $\left|\frac{\bar{d}}{d}t\right| = 1$, 及 $\overline{\left(\frac{b}{\bar{d}t}\right)} = \frac{\bar{b}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{b}t}{d}$, 这就是形式 (4) 的变换.

以单位圆内部作为空间，形如 (4) 的变换所成的群作为变换群，这样所得出的几何学称为 Лобачевский 几何学，或双曲几何学.

刚才是以单位圆的内部作为空间出发的，如果我们以上半平面作为空间出发，则得性质相同而表达方式不同的几何学. 群变为

$$w = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc = 1, \tag{5}$$

而且 a, b, c, d 是实数. 要证明此点只要证明把上半平面变为上半平面的线性变换一定是而且也就是 (5) 即足. 把 $z = 0, 1, \infty$ 代入 (5) 式，要求 w 是实数，因而可以得出 a, b, c, d 是实数，而且 $ad - bc \neq 0$. 再由

$$\frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2},$$

可知如果 $ad - bc > 0$, 则把 i 变为上半面的点，不然，把 i 变为下半平面的点. 因此 $ad - bc = \rho^2$, 分子分母各以 ρ 除之即得所求.

今后我们按照方便有时考虑单位圆内部，有时考虑上半平面，但所得的结果极易由其一而推出另一.

上半面的表达形式称为双曲几何的 Poincaré 表达形式.

§5. 距　离

单位圆内(或上半面上)的点作为几何对象，有变换

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, \ 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{1}$$

(1) 也称为一个非欧运动. 作为我们的运动群 Γ 中的一个变换，首先，圆内任一点 a

可以由运动群 Γ 中的一个变换变为 0. 因此,双曲空间是在 (1) 下可递的. 不仅如此,一点带一方向所成的集合也是可递的. 方法是先把一点换为 0, 然后经过旋转把任意方向变为与 x 轴的正向同向.

再看"测地线"(或迳称直线),即正交单位圆的圆,通过两点有一条而且仅有一条"测地线". 证明此点极易. 我们可以看上半平面. 作这两点的垂直平分线交 x 轴于 C,以 C 为心过这两点的圆,就是唯一的过这两点的合乎要求的圆.

测地线成一个可递的集合. 还是用上半平面来证明,任一测地线对应于 x 轴上两点(交点),对任意二实数,有一实变换 $w=(az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$ 把它们变为任意二点. 故得所证.

两条测地线如果相交则其夹角是不变量.

现在主要需要研究的是两点间的不变量的问题. 假定 z_1, z_2 是两点,命 $\bar{z}_1^{-1}$, $\bar{z}_2^{-1}$ 是其对单位圆的对称点. 作交比

$$g(z_1, z_2)=(z_1, \bar{z}_1^{-1}, z_2, \bar{z}_2^{-1})=\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_1^{-1}-z_2}\Big/\frac{\bar{z}_2^{-1}-z_1}{\bar{z}_1^{-1}-\bar{z}_2^{-1}}=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2, \qquad (2)$$

这是 z_1, z_2 两点的不变量. 换言之,如果 z_1, z_2 变为 w_1, w_2, 则

$$g(z_1, z_2)=(z_1, \bar{z}_1^{-1}, z_2, \bar{z}_2^{-1},)=(w_1, \bar{w}_1^{-1}, w_2, \bar{w}_2^{-1})=g(w_1 w_2).$$

反之,如果 $g(z_1, z_2)=K$, K 是正数,则有变换把 z_2 变为 0, 把 z_1 变为 z, 而 $g(z,0)=|z|^2=K$. 经过旋转可以使 0 不变,而把 z 变为 $K^{\frac{1}{2}}$. 因而得出: $g(z_1, z_2)$ 也是两点的唯一不变量. 如以上半平面为基础,则得出不变量

$$h(z_1, z_2)=\left|\frac{z_1-z_2}{\bar{z}_1-z_2}\right|^2.$$

直接用 $g(z_1, z_2)$ 作为距离,并不能得出距离的若干重要性质. 我们用以下的方法来推出距离函数. 取 $z_1=z+dz$, $z_2=z$, 则得出

$$\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \qquad (3)$$

这是微分不变量,即它经过 (1) 而不变. 直接的证法是微分 (1) 得

$$dw=e^{i\theta}\left(\frac{1}{1-\bar{a}z}+\frac{\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2}\right)dz=e^{i\theta}\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz,$$

即

$$|dw|^2=\frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}z|^4}|dz|^2,$$

又

$$1-|w|^2=1-\frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2},$$

因此,得

$$\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}=\frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}.$$

在双曲几何中长度元素等于

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-x^2-y^2},$$

而面积元素等于

$$d\sigma=\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

如果对上半平面来讲,长度元素与面积元素各为

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y},\quad d\sigma=\frac{dxdy}{y^2}.$$

定理 1. 在双曲空间中取二点 z_1, z_2, C 为连接此二点之任意曲线(假定它是连续的而且有连续切线),则使

$$\int_C ds$$

取最小值的 C 就是测地线.

证. 取上半平面为基础. 作一中心在 x 轴上,而且经过 z_1, z_2 的圆,命其中心为 $(t, 0)$,则圆之方程可以写成为

$$x=t+\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

且设 $\theta=\theta_1$ 及 θ_2 时, $z=z_1, z_2$. 曲线 C 的方程可以写成为

$$x=t+\rho(\theta)\cos\theta,\quad y=\rho(\theta)\sin\theta,$$

$$\rho(\theta_1)=\rho(\theta_2)=\rho,\quad 0<\theta_1<\theta_2<\pi,$$

则

$$\int_C\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)^2+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)^2}}{\rho(\theta)\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\left(\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}\right)^2}\frac{d\theta}{\sin\theta}\geqslant\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1}.$$

当且仅当 $\rho'(\theta)=0$ 时取等号,即当 $\rho(\theta)=\rho$ 是一常数时取等号,即当 C 是过 z_1, z_2 正交于 x 轴的圆时取等号.

这证明不但证明了定理,而且证明了沿测地线该积分的值等于

$$\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1}.$$

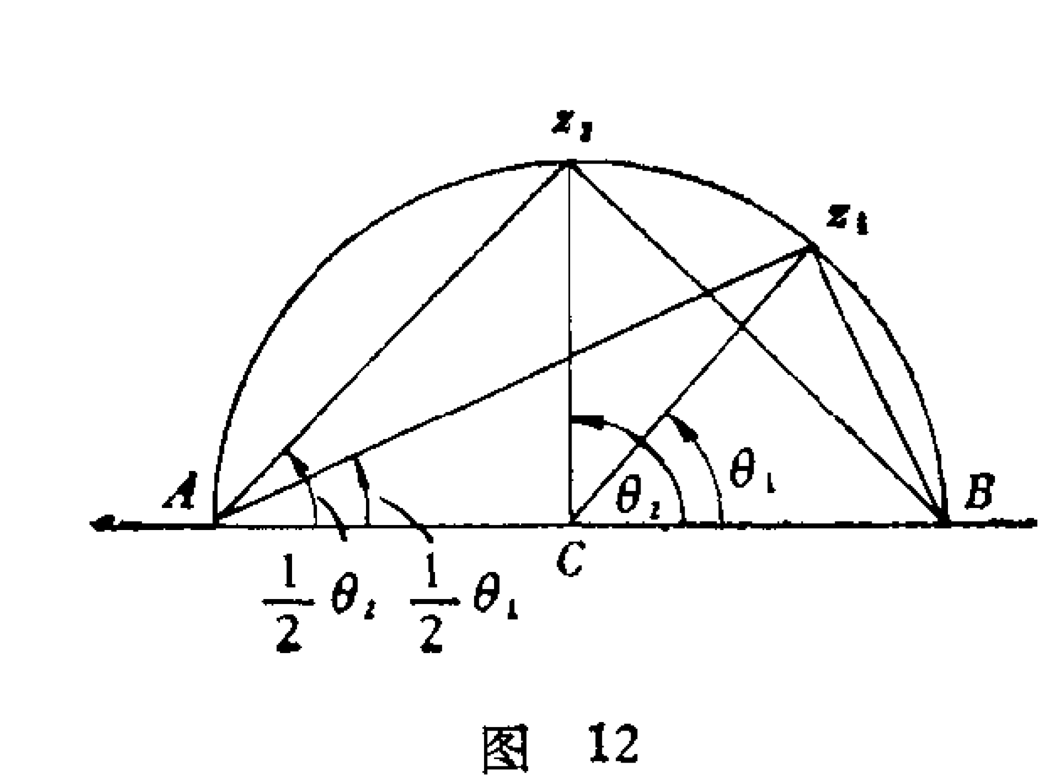


图 12

这一数值的几何意义是: 过 z_1, z_2 的测地线交 x 轴于 A, B; C 为圆的中心,因此

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1=\frac{Bz_1}{z_1A},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2=\frac{Bz_2}{z_2A}.$$

因此

$$\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1}=\log|(B, A, z_2, z_1)|.$$

不难算出

$$|(B,A,z_2,z_1)|^2 = \frac{1+|z_1-z_2|/|\bar{z}_1-z_2|}{1-|z_1-z_2|/|\bar{z}_1-z_2|} = \frac{1+h^{1/2}(z_1,z_2)}{1-h^{1/2}(z_1,z_2)}.$$

因此，我们可以定义

$$D(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\log\frac{|\bar{z}_1-z_2|+|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2|-|z_1-z_2|},\quad I(z_1)>0,\ I(z_2)>0$$

是两点 z_1, z_2 间的非欧距离.

在单位圆的情况是

$$D(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\log\frac{|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|},\quad |z_1|<1,\ |z_2|<1.$$

由定义显然可见，如果

$$D(z_1, z_2) = 0,$$

则

$$\frac{|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|} = 1.$$

即 $|z_2-z_1|=0$，即 $z_1=z_2$. 因此，距离函数有下列性质:

(i) $D(z_1, z_2)=0$ 的必要且充分条件是 $z_1=z_2$.

(ii) $D(z_1, z_2)\geqslant 0$. 由于 $|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|\geqslant|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|$，故得所证.

(iii) $D(z_1, z_2)=D(z_2, z_1)$.

(iv) $D(z_1, z_3)\leqslant D(z_1, z_2)+D(z_2, z_3)$. 当且仅当 z_1, z_2, z_3 在一测地线上取等号.

由极小性质可得以上的结论. 性质 (iv) 可讲述为: 非欧三角形两边之和大于另一边.

§6. 三 角 形

所讲三角形是指三条测地线所围成的三角形(图 13). 不难推出“两边夹一角全等定理”，“两角一联边全等定理”，“三边全等定理”，“大角对大边定理”等等. 我们现在来求三角形的面积.

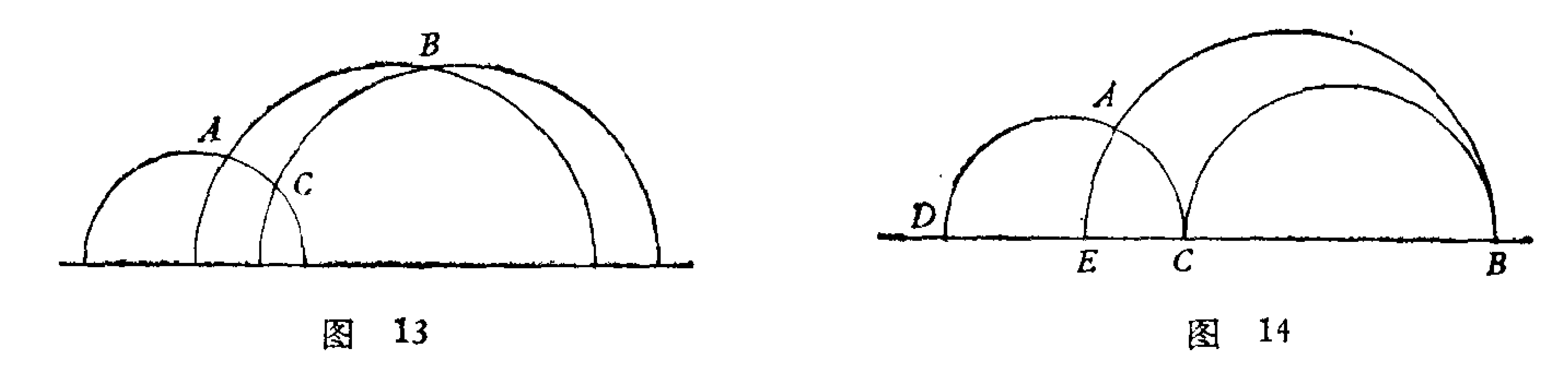


图 13　　　　图 14

定理 1. 三角形 A, B, C 的非欧面积等于 $\pi-\angle A-\angle B-\angle C$.

证. 以上半平面为基础，面积等于

$$\iint\frac{dxdy}{y^2}.$$

1) 先研究 $\angle B=\angle C=0$ 的情况(如图 14). 不难证明有实变换把 B, C, D 各变

为 $\infty, 1, -1$（或变为 $\infty, -1, 1$），而且所对应的行列式是正的．实质上，

$$z' = \pm \frac{(D-2B+C)z + (BC - 2DC + DB)}{(C-D)z + (D-C)B}$$

就是这样的变换．而且行列式等于 $\pm 2(D-C)(C-B)(B-D)$ 经此变换后，图 14 变为图 15．假定 A 的坐标是 (x_0, y_0)，则

$$\int_{x_0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dxdy}{y^2} = \int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \Big|_{x_0}^{1} = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x_0 = \pi - \angle A.$$

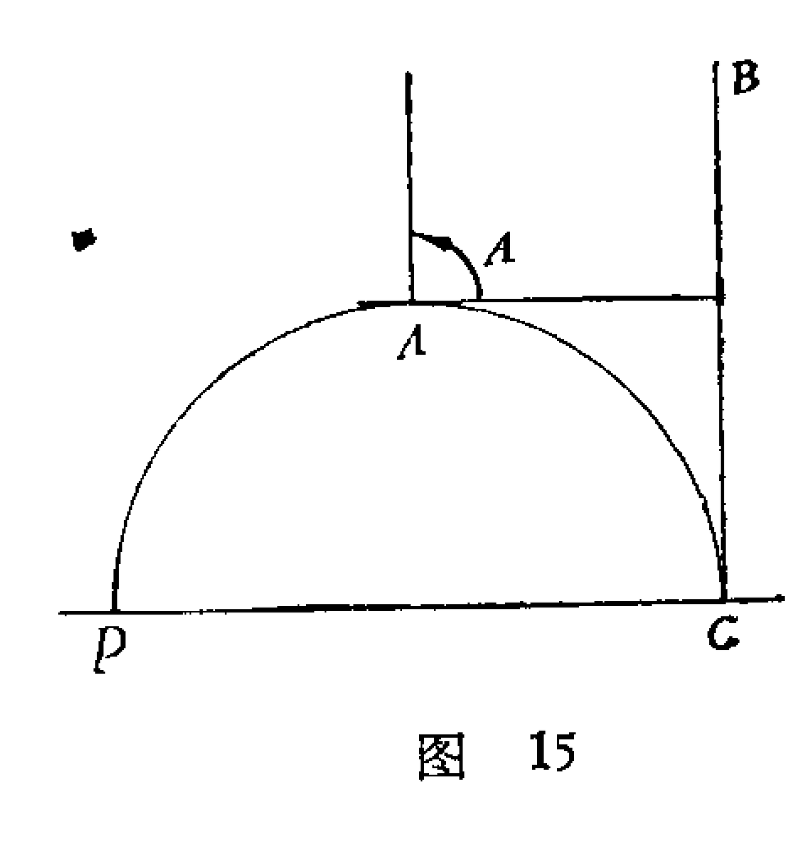


图 15

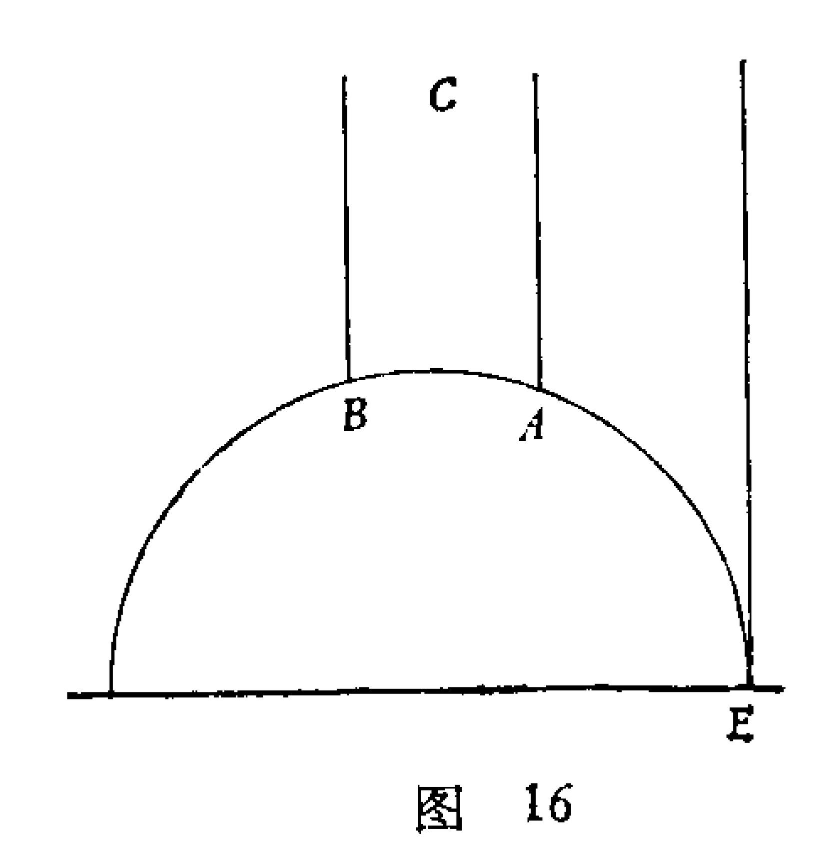


图 16

2）假定 $\angle C = 0$．用实变换把 C 变为 ∞，得图 16．由 1）可知

$$\Delta ABC = \Delta BEC - \Delta AEC = \pi - \angle B - (\pi - (\pi - \angle A)) = \pi - \angle A - \angle B.$$

3）如果 $\angle A, \angle B, \angle C$ 无一为 0，如图 17．由 2）可知

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \Delta ADC - \Delta ABD \\ &= (\pi - \angle C - \angle A - \angle BAD) \\ &\quad - [\pi - (\pi - \angle B) - \angle BAD] \\ &= \pi - \angle A - \angle B - \angle C.\end{aligned}$$

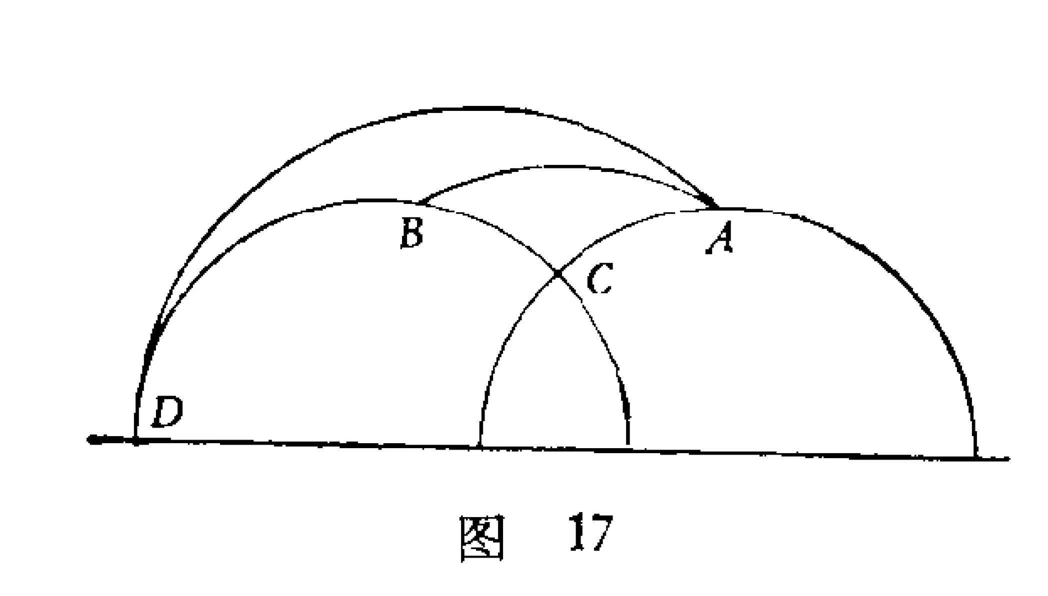


图 17

定理证毕．

由此定理立刻推出

定理 2. 三角形三内角之和不大于二直角，其值可取 0 与 π 之间的任何一值．

§7. 平 行 公 理

总结一下这三种几何的一个基本不同点．

欧几里得几何学（抛物）．平面上的点是我们的几何对象（不包括无穷远点）．运动群由 $z \to e^{i\theta}z + k$ 及 $z \to \bar{z}$ 所组成．测地线就是直线．在平面上过一点只能作一（唯一）测地线与一给定的测地线不相交（欧几里得第十一公设）．

Riemann 几何学（椭圆）．球面上的点是我们的几何对象．运动群：球的旋转，及对过球心平面的对称．测地线就是大圆．在球面上过一点不能作一测地线与一给定的测地线不相交．

Лобачевский 几何学（双曲）．单位圆内的点是我们的几何对象．运动群是

$$z \to e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

及 $z \to \bar{z}$．测地线就是正交于单位圆的圆（在单位圆内的部分）．过一点有无穷个测地线

与一给定的测地线不相交.

当球与圆的半径充分大的时候，如果我们的测量仪器根本分辨不出圆弧的曲率的时候,我们就无法分辨我们所在的空间是那一类几何学. 在历史上"陆地如棋局"的看法,就是把地球面的椭圆几何误认为抛物几何的看法. 把空间看为无穷无尽的欧几里得空间,而日月星辰处于其中的看法,也忽视了测地线有曲率这一事实.

§8. 非欧运动分类

我们现在来研究非欧运动

$$W = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{1}$$

的分类. 在椭圆几何中我们已经看到其中的变换只可能是椭圆的. 在抛物几何中，可能有抛物的也可能有椭圆的. 在双曲几何中,问题更复杂这里可能是双曲的,抛物的及椭圆的三种变换.

1）圆内有一个不变点. 如果(1)把 0 变为 0, 则得 $W = e^{i\theta}z$. 这是一个椭圆变换. 因此

$$\frac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{2}$$

是一个使 a 不变的非欧运动而且没有其他不动点(在圆内). 因此，在圆内有一个不动点的非欧运动是椭圆的,而且形式就是(2). 这样的变形称为非欧旋转. 如果圆外有一个不变点 b, 则 $a = \frac{1}{\bar{b}}$ 是一个圆内的不变的,因而仍然是椭圆的. 因此今后我们仅需讨论不变点在圆周上的情况.

2）圆周上有二不变点. 现在取上半平面,即二不变点在 x 轴上. 如果它们是 0, ∞, 则得 $W = kz$, $k > 0$. 它是一个双曲变形. 如果 α, β 是任意二不变点,则

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

是使 α, β 不变的双曲变形. 总之,如果二不动点在圆上,则得双曲变形.

3）仅有一个不变点. 还是以上半平面为例. 当此点在 ∞, 则 $W = z + \lambda$ (λ 实数). 而一般的是

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda.$$

这是抛物变形.

第三章　解析函数、调和函数的定义及例子

§1. 复变函数

复变函数是一个复变数 z 的函数,函数值也是复数 $w=f(z)$. 变数的范围是复平面上的一个点集 M. 对 M 的每一点 z, 对应一个复数 w, 这样的函数 $f(z)$ 称为单值的. M 称为 $f(z)$ 的变数范围. 当 z 取 M 的一切值而得出的所有的 w 值的集合 N, 称为函数值的范围.

命 $z=x+iy$, $u=u+iv$. 实际上所谓复变函数 $w=f(z)$, 就是两个实变数 x, y 的两个实函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

分别把 z 与 w 各安置在一个复数平面上,则一个复变函数可以看成为 (x,y) 平面上的集合 M 到 (u,v) 平面上的集合 N 的某一映照. 如果 $w=f(z)$ 是单值的,而且对应于不同的 $z\in M$, 有不同的 $w\in N$, 则这样的映照称为在 M 内是一一的,或单叶的. 在这样的情况下, 我们可以定义 $z=\varphi(w)$. 它把 N 上每个 w 映到 M 上的 z 点, 这 z 正是在 $f(z)$ 下映到 w 的点. 它称为 $w=f(z)$ 的反函数.

如果 $w=f(z)$ 把 M 映到 N 上,而 $w'=g(w)$ 又把集合 N 映到 P 上,则

$$w'=h(z)=g[f(z)]$$

把 M 映到 P 上,这叫做函数 f, g 的复合函数. 特别当 $w=f(z)$ 是一一的,而 $z=\varphi(w)$ 是 f 的反函数,则有

$$\varphi(f(z))=z.$$

例 1. 第一、二章所说的线性变换

$$w=(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc\neq 0$$

都是这样的变形 (M, N 是整个 Gauss 平面).

例 2. $w=z^n$ 把单位圆的内部变为单位圆的内部,但并不是一一的. 因为对任一整数 l, $r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2\pi il}{n}+\frac{i\theta}{n}}$ 都对应于一点 $re^{i\theta}$.

§2. 保角变换(或称共形映照)

一个复变函数 $w=f(z)$ 可以看成为一个复平面上的变换(或映照):

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\tag{1}$$

它把区域 M 变为区域 N. 假定函数 u, v 对 x, y 在 M 内是可微分的,则微分矢量间的关系是

$$\left.\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\\ dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\end{aligned}\right\}.\tag{2}$$

另一微分矢量 (d_1u, d_1v) 对应于 (d_1x, d_1y). 矢量 (du, dv) 与 (d_1u, d_1v) 的夹角的余弦等于

$$\frac{dud_1u + dvd_1v}{\sqrt{(du^2+dv^2)(d_1u^2+d_1v^2)}}$$
$$= \frac{Edxd_1x + F(dxd_1y + d_1xdy) + Gdyd_1y}{\sqrt{(Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2)(Fd_1x^2 + 2Fd_1xd_1y + Gd_1y^2)}}. \tag{3}$$

这儿

$$E = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad F = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad G = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

如果在某区域内这夹角等于矢量 (dx, dy), (d_1x, d_1y) 的夹角,特别分别取 $dx = d_1y = 0$ 和 $dx = d_1x$, $dy = -d_1y$, 则得条件

$$F = 0, \quad E = G. \tag{4}$$

由 $F = 0$ 得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi\frac{\partial u}{\partial y}.$$

代入 $E = G$, 则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \varphi^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

即得 $\varphi^2 = 1$. 因此, $\varphi = \pm 1$. 若还要求角度的方向保持不变,则需 $\varphi = 1$, 即得著名的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

由于两条曲线的交角决定于其交点处的两个切线方向,因此,如果映照 (1) 使任何两条曲线的交角不变,则它一定适合于 (5). 反之,如果在某区域内 (1) 适合于 (5), 则一定使两曲线的交角(在此区域内的)不变.

因此适合此条件的变换称为**保角变换**(或称保角映象). 但必须排除一种可能性,即那些使 $E = F = G = 0$ 的点. 此时,公式 (3) 的右边变为 $\frac{0}{0}$, 因此并不能得出保角的性质.

例如: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. 在原点并非保角变换,虽然其他诸点都保角.

如果变换 (1) 适合于 (5), 则得

$$du^2 + dv^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right](dx^2 + dy^2). \tag{6}$$

这说明了: 一个保角变换把一点附近的一个无穷小圆周变为一个无穷小圆周(圆性质). 因此,也有人称为共形映照. 当然也必须注意使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

的一些点,对这样的点,结论并不正确.

前二章所谈到的线性变换都是保角变换，而且是在大范围内具有圆性质的.

从 Cauchy-Riemann 条件可以推出(假定在某区域D内，u，v有二阶连续偏微商)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0.$$

同样可以得出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为 Laplace 算子、方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

称为 Laplace 方程. 任何一个在区域D内所定义的保角映象(1)，其u与v都是 Laplace 方程的解.

在区域D中适合于 Laplace 方程的函数称为D内的**调和函数**，或称**位函数**. 而v称为u的共轭函数，显然可见 $-u$ 亦是v的共轭函数.

现在考虑由一个调和函数 $u(x, y)$ 求出它的共轭函数的问题.

假定D是一单连通域，而 $u(x, y)$ 是D上的调和函数，则定义

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right), \tag{7}$$

这儿 (x_0, y_0) 是D内的一定点，(x, y) 是D内的一变点. Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

就是积分(7)为确切微分的积分的条件. 即(7)是 (x, y) 的函数，与由 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的积分线路无关.

再看

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h, y)-v(x, y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{(x, y)}^{(x+h, y)}\left[-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}-\frac{\partial u}{\partial y}dx=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

同样可得 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. 即 $v(x, y)$ 是$u(x, y)$ 的共轭函数. 但因为 $v(x, y)$ 是由它的偏微商来决定的，因此可以相差一个常数. 也就是 $u(x, y)$ 的共轭函数一般是

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C.$$

这儿C是一实数.

再看D为多连通域的情况. 此时积分

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C$$

不一定是一个单值函数. 常会因为所取的路径不同而得不同的数值. 如果两条路线L，$\tilde{L}$可以在D的范围内由其一连续变形变为另一时，沿它们的积分还是相等的. 但，当不可能的时候，则不一定相等. 例如

$$u = \log(x^2 + y^2).$$

它在环形 $\rho_0^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_0^2$ 内是一调和函数. 环形是连通的，但不是单连通的. 其共轭函数

$$v(x, y) = 2\int_{z_0}^{z} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + C = 2\,\mathrm{Arg}\, z + C_2$$

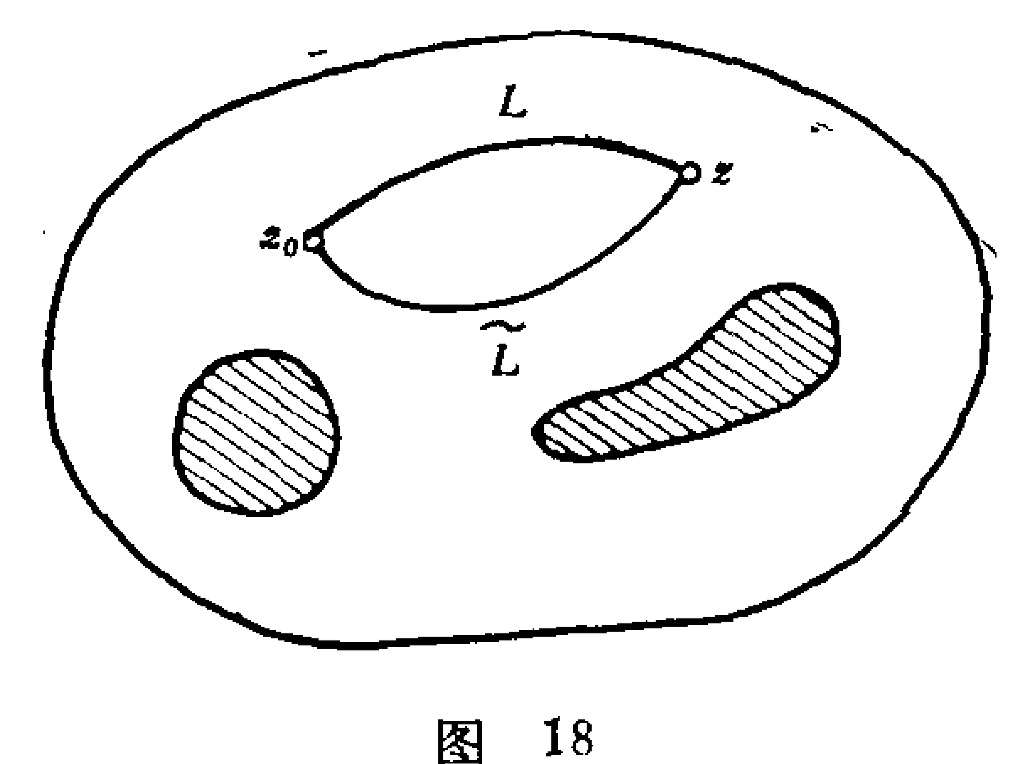


图 18

在环形内是一个无限多值的函数. 我们有

$$\Gamma_1 = \int_{x^2+y^2=\rho^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

在环形中任何一条曲线如果绕 $z = 0$正向一周，则可以不出环形之外连续地变为圆 $x^2 + y^2 = \rho^2$. 任何一条由 z_0到 z 的线C可以连续变化变为另一条由 z_0到 z 的路线. $\tilde{C}$ 是由以下诸部分构成的; (i) 一条无交点的曲线 $\tilde{C}_0$, (ii) 绕 $|z| = \rho N$ 圈（正向的N是正，负向的N是负). 这样

$$v(x, y) = 2\arg z + 2\pi N.$$

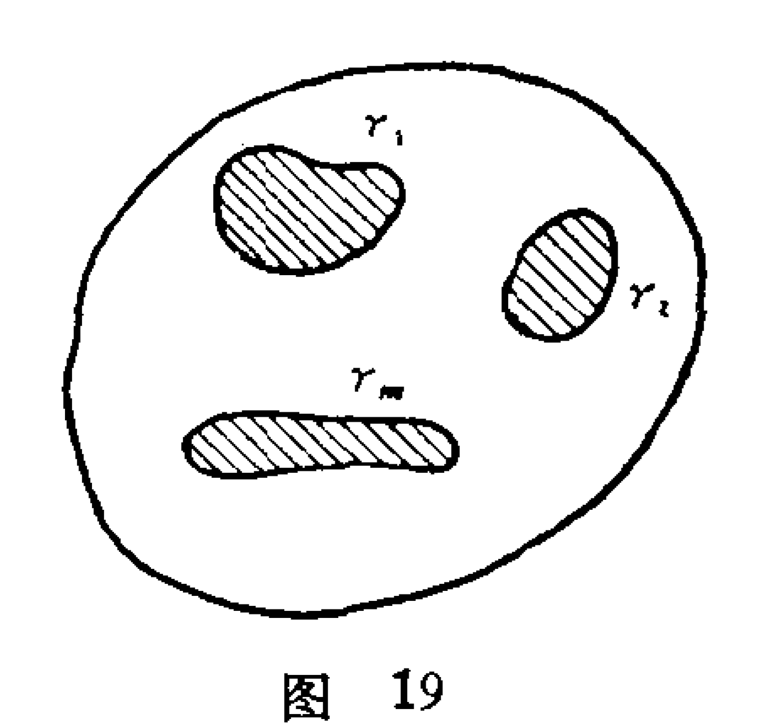


图 19

再回到一般的问题. 假定D内有m个"岛屿" $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$, 命

$$\Gamma_h = \int_{\bar{\gamma}_h}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right).$$

$\bar{\gamma}_h$ 是只含有 γ_h 的在D内的闭曲线. 任何一条联接 z_0z 的曲线C可以改变为一条曲线 $\tilde{C}$. 它是由以下诸部分所构成的: (i) 一条由 z_0到 z 的简单曲线 $\tilde{C}_0$(指无交点的曲线), (ii) 绕 γ_h 的简单闭曲线,可能绕行 N_h 次(正向正 N_h, 负向负 N_h). 而积分

$$v(x, y) = \int_{\substack{z_0\\ \tilde{C}}}^{z} = \int_{\substack{z_0\\ \tilde{C}_0}}^{z} + N_1\Gamma_1 + \cdots + N_m\Gamma_m.$$

这儿 $N_1, \cdots, N_m$ 是整数. 常数 Γ_h 叫做对应于 γ_h 的周期. 现在 $v(x, y)$ 是多值函数. 虽然如此,它的微商还是单值的,而且仍然适合 Cauchy-Riemann 方程.

§ 3. Cauchy-Riemann 方程

上节所得出的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

也称为 Euler-D'Alembert 方程. 假定D是一域, $u(x, y)$, $v(x, y)$ 在D内是有一阶偏微商的函数. 假定方程 (1) 在D内成立.

把 (1) 换为极坐标

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

因此

$$-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\rho},$$

$$\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial v}{\partial\rho}.$$

即得出

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{2}$$

Laplace 方程也变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0, \tag{3}$$

即

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

使用 (2) 与 (3) 时，特别注意 $\rho=0$ 时的特殊性.

调和函数是线性的，即如果 u, v 是调和函数，则对任何常数 α, β, $\alpha u+\beta v$, 也是调和函数.

例 1. 把 z^n 分为虚实部分

$$u=\rho^n\cos n\theta,\quad v=\rho^n\sin n\theta.$$

它们适合 (2) 式，即

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=n\rho^n\cos n\theta=\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=n\rho^n\sin n\theta=-\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

即它们是共轭调和函数. 如果作为变换来看，必须注意当 $\rho=0$ 时的非保角性.

例 2. 由线性性质把一个多项式分虚实部分，它们也成一共轭调和函数对.

例 3. 假定一级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\quad a_n=\alpha_n+\beta_n i$$

在 $|z|<R$ 内收敛，则它的实虚部分

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)\rho^n,$$

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\sin n\theta+\beta_n\cos n\theta)\rho^n$$

也成为一对共轭调和函数.

特别如

$$e^z=e^{\rho\cos\theta}\cdot e^{i\rho\sin\theta}.$$

$$e^{\rho\cos\theta}\cos(\rho\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n\cos n\theta}{n!},$$

$$e^{\rho\cos\theta}\sin(\rho\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n\sin n\theta}{n!}$$

是一对共轭调和函数.

又如

$$\log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

$u = \log|z|$ 是调和函数,因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

虽然 $v = \operatorname{Arg} z$ 是多值函数,但是它是 u 的共轭调和函数.

例 4. 函数(对正整数 n)

$$u = \rho^{-n}\cos n\theta, \quad v = -\rho^{-n}\sin n\theta$$

也是一对共轭函数(但 $\rho = 0$ 必须除外).

例 5. 在环 $r < |z| < R$ 内,如果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \alpha_n + \beta_n i$$

收敛,则它的实虚部分

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta)\rho^n,$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta)\rho^n$$

成一对共轭调和函数.

假定

$$x = x(x_1, y_1), \quad y = y(x_1, y_1)$$

是一对共轭函数,则 u, v 作为 x_1, y_1 的函数也是共轭的.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} = -\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

即共轭的关系经过保角变换而不变,也可以说成为保角变换之积仍然是保角变换. 再看 Laplace 方程经保角变换而变化的情况:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2},$$

相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

因此调和函数 $u(x, y)$ 经保角变换后依然是调和函数.

以上所论都必须注意变数所处的区域.

条件 (1) 与 (2) 是以下形式的条件的特殊形式.

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

即在保角映象 $u+iv$ 所定义的区域内如果有一曲线 C，则在这曲线上 u 的切向微分等于 v 的法向微分，u 的法向微分等于负的 v 的切向微分. 要证明这点是容易的. 因为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{dx}{ds}\right)=-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}=-\frac{\partial v}{\partial s},$$

而

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{dx}{ds}\right)=+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

注意. 切线方向取定后，法线方向是指依此方向正向转 90° 的方向. 如果取 C 为平行于 x 轴的直线 $y=k$，则得 (1) 式. 如果取 C 为圆 $x^2+y^2=R^2$，$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial \rho}$，$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$，即得 (2).

§4. 解 析 函 数

在区域 D 内考虑由适合于 Cauchy-Riemann 方程的二函数 $u(x, y)$，$v(x, y)$ 所定义的复函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

这函数有一特点，不管 h 循哪个方向趋于 0 时，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

是唯一的，不依趋向不同而变化.

命 $h=s+it$，则

$$u(x+s,y+t)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+o(|h|),$$

$$v(x+s,y+t)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+o(|h|).$$

因此得

$$\begin{aligned}f(z+h)-f(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t\right)+o(|h|)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s+it)+o(|h|).\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这是一个与 h 无关的函数.

定义. 如果在 D 内某点 z，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$$

唯一存在,则在此点 $f(z)$ 称为可导的. 如果在 z 的一个邻域中 $f(z)$ 均可导,则称 $f(z)$ 在 z 为解析的.

注意. 确切的说,极限存在是指给了 $\varepsilon>0$,我们可以找到 $\delta(>0)$,使 $|h|<\delta$ 时,常有

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon.$$

我们说 $f(z)$ 在区域 D 内解析,是指如果在 D 内每点 $f(z)$ 都是解析的. D 内两个解析函数的和,差,积仍然是解析函数,如果除函数在 D 内不等于 0,则商函数也是解析的.

也易见:如果 $g(z)$ 是 z 的解析函数(在 D 域的),而 $f(w)$ 在 $g(z)$ 的取值区域内是 w 的解析函数,其函数值在 Δ 域内,则 $f(g(z))$ 也是解析函数. 当 u, v 在 z_0 处可微,适合 Cauchy-Riemann 方程,则 $u+iv$ 在 z_0 解析;反过来,如果一函数在 z 处解析,则其虚实部分一定适合 Cauchy-Riemann 条件,而且是一对共轭的调和函数. 证明极易,只须对实数 s, t, 有

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(z+s)-f(z)}{s}=\lim_{t\to 0}\frac{f(z+it)-f(z)}{it},$$

因而推出

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

证毕.

因此,如果 $f(z)$ 是一解析函数,则

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f(z)}{\partial y}.$$

因此

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z).$$

引进符号

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

及

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

则

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}f(z)=\frac{1}{2}(f'(z)-f'(z))=0.$$

即如果 $f(z)$ 是解析函数,则

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar z}=0, \tag{2}$$

并且反过来也对.

这个结果可以看成为：命 $\zeta=x+iy$，$\eta=x-iy$，因此，$f(z)$ 是 ζ 与 η 的函数，而解析函数者乃与 η 无关的一函数也.

习题. 试证 Laplace 方程可以写成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}=0.$$

例 1. 由于 z 是解析函数，所以 z^n 是解析函数，因而 z 的多项式 $p(z)$ 是解析函数. 在一区域D中，如果多项式 $q(z) \neq 0$，则 $\frac{p(z)}{q(z)}$ 也是解析函数.

例 2. 如果在 $z=z_0$，$f(z)$ 有一幂级数表示

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

它在圆 $|z-z_0|<R$ 内收敛，则它在此圆内是解析函数.

因此，在整个平面上

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$\sin z$，$\cos z$ 都是解析函数.

又由于

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1,$$

所以在单位圆内 $\log(1+z)$ 是一解析函数.

例 3. 如果

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad 在\ R_1<|z-z_0|<R_2$$

中收敛，则 $f(z)$ 在此区域中也是一个解析函数.

定义. 如果函数 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 0 点附近解析，则 $f(z)$ 定义为在∞解析.

例如. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ 在全平面除去 0 点包括∞点，处处解析.

例如. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$，在单位圆外解析.

§5. 幂 函 数

命 n 是一自然数，则

$$w=z^n \tag{1}$$

是全平面上解析的函数.

表为极坐标的形式

$$z=re^{i\varphi}, \quad w=\rho e^{i\theta},$$

则

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi. \tag{2}$$

对应于一个 z 有一个 w, 但对应于一个 w 却有 n 个 z, 其值为

$$\rho^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

因此 (1) 并不表示 z 平面与 w 平面的一一映照. 但如果考虑 z 平面上的扇形 (k 是固定的整数)

$$k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n},$$

则 (1) 把这个扇形变到去掉正向半轴的 w 平面. 扇形中一切从原点出发的射线, 变为从 $w=0$ 出发的射线. 以 $z=0$ 为圆心的弧变为以 $w=0$ 为圆心的弧.

对应于直线 $u=u_0$, $v=v_0$ 的曲线是

$$u_0 = r^n \cos n\varphi, \quad v_0 = r^n \sin n\varphi.$$

如图 20, 第一方程所代表的曲线用虚线表示, 第二方程所表的曲线用实线表示.

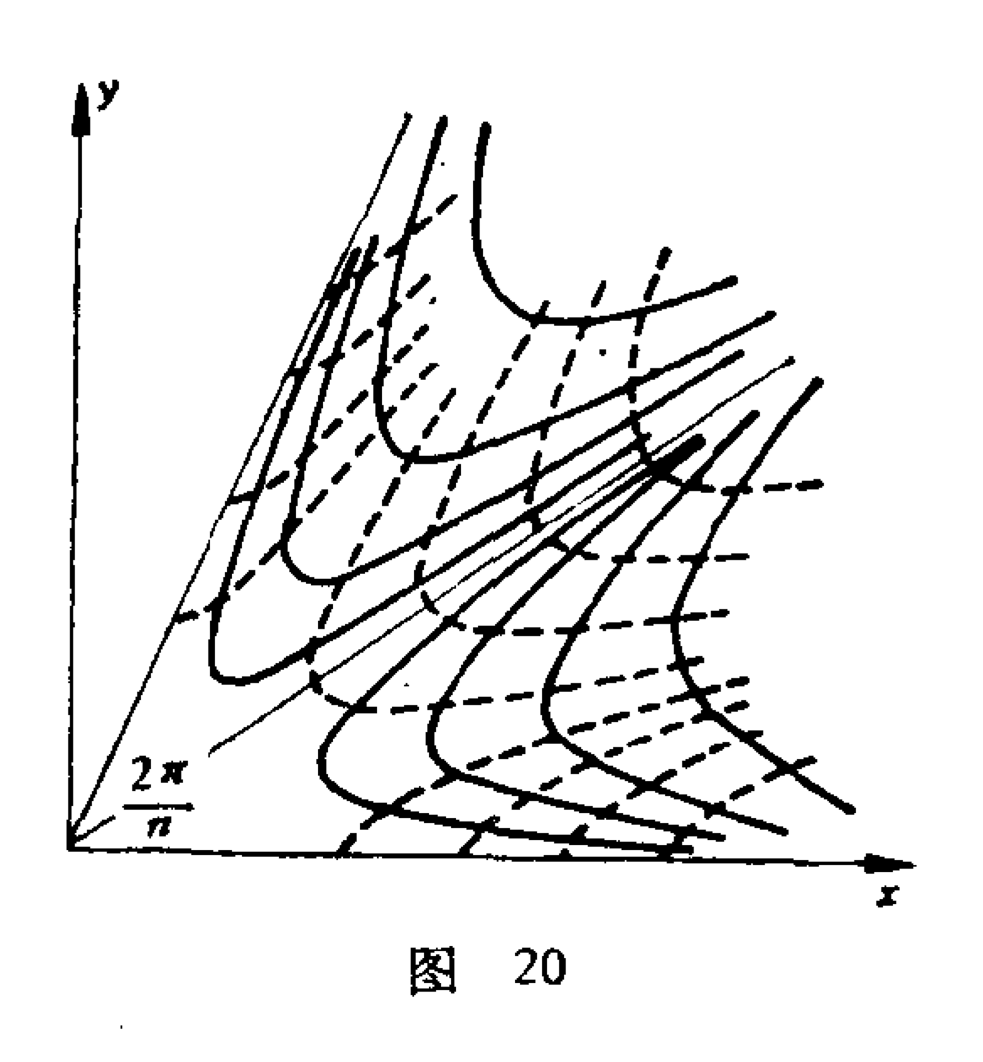


图 20

幂函数的反函数

$$w = z^{\frac{1}{n}}$$

是一个 n 值的函数. 在 z 平面上, 从 $z=z_0$ 出发引一不过 0 的连续曲线 C 达到 z_1, 在 w 平面上先取一个固定的 w_0 (是 n 个数值之一), 当 z 沿 C 变时, w 连续变化画出连接 w_0 和 w_1 的曲线 D. 这 w_1 是唯一决定的. 很明显, 由于 w_0 的选择有 n 个, 因而在 w 平面上可以画出 n 条曲线 $D_1, \cdots, D_n$. 而 $D_1, \cdots, D_n$ 是由其中之一绕原点旋转 $\frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, \cdots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$ 角而得出来的.

如果 D 是一不包有 $z=0$ 的区域, 则 $z^{\frac{1}{n}}$ 可以分出 n 个连续单值函数来, 每个函数取 $z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个值中的一个值. 这 n 个函数称为多值函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 的分支. 每点上它们的值彼此相差一个因子 $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 对每个分支来说, 映照是一对一的, 并且

$$(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

即 $z^{\frac{1}{n}}$ 的每一个分支是解析函数.

如果 C 是一条包有原点的曲线, 当 z_0 绕原点一圈时, 则 w_0 变为

$$w_0 e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

因此包有 0 的区域的 n 个分支不能分开, 经过绕一圈后, 可以从一分支过渡到另一分支.

§6. Жуковский 函数

函数

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

是单值的. 当 $z=0$ 时, $w=\infty$. 微商

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right) \tag{2}$$

在 $z=\pm 1$ 时变为0,因此可以预料在这两点,变形将有特殊性质.

命 $z=\rho e^{i\theta}$, $w=u+iv$, 则

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

消去 θ, 则得

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1. \tag{3}$$

对固定的 ρ, 它在 w 平面上表一椭圆. 即对应于两个圆 $|z|=\rho$, $|z|=\frac{1}{\rho}$, 在 w 平面上有一个椭圆 (3). 当 $\rho\to 1$ 时, 椭圆的长轴之半趋于1, 而短轴趋于0; 当 $\rho\to 0$ 时(或 $\rho\to\infty$ 时),两轴都趋向∞. 因此可见单位圆的内部与外部都对应于整个 w 平面,除去沿实轴从 -1 到 1 的一段线. 而单位圆 $|z|=1$ 本身就对应于这一线段, 但经过两次.

解得

$$z_1, z_2=w\pm\sqrt{w^2-1}$$

是二值的函数.如果绕 $w=1$ 一周,就会把函数值 $w+\sqrt{w^2-1}$ 变为 $w-\sqrt{w^2-1}$. 为了解决这个问题, 我们引进一个概念——Riemann 面. 把两个 w-平面都从 -1 到 $+1$ 割开迭在一起, 平面 I 表示 $z=w+\sqrt{w^2-1}$, 平面 II 表示 $z=w-\sqrt{w^2-1}$. 把平面 I 的上口与平面 II 的下口粘上, 也把平面 I 的下口与平面 II 的上口粘上(注意: 这是理想的, 实际是粘不起来的). 这样的理想的面称为 Riemann 面. 它是表达多值函数的一个好工具. 在这样的面上,函数

$$z=w+\sqrt{w^2-1}$$

就变为单值的了. 当绕 $|w|=1$ 一周时, w 的数值转到平面 II, 再转一周时, 又上来回到原处.

§7. 对 数 函 数

命

$$w=\log z.$$

当 z 在角域 $\alpha<\arg z<\beta$ 中变化时,则在 w 平面上得一无穷带形 $\alpha<v<\beta$.

命 $z=\rho e^{i\theta}$, 则

$$w=\log\rho+i\theta.$$

故

$$u=\log\rho,\quad v=\theta.$$

当 ρ 从 0 变为∞时, $\log\rho$ 从 $-\infty$ 变为∞. 故得所云.

一般讲来

$$w = \log\rho + i(\theta + 2k\pi),\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots.$$
所以我们不仅有一个带形,而应当有无穷个带形.

另一方面，长条 $\alpha < v < \beta$ 对应于 z 平面上的一个角. 如果 $\beta - \alpha > 2\pi$，则平面上被覆盖了不止一次. 怎样来处理这样的多值函数呢？我们也是做一 Riemann 面. 这次 Riemann 面是由无穷片平面迭合起来的，都从 0 到 $-\infty$ 沿实轴切开. 把一平面的上切口与另平面的下切口粘上，于是 w 平面上的一个宽度为 2π 的带形对应于一叶 Riemann 面. 这样 Riemann 面上的一点只对应于 w 平面上的一点了.

习题. $w = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}z$ 把 z 平面上 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 之间的带形变为单位圆的内部，但除去由 $w = -1$ 到 $w = 0$ 的一段实轴.

§8. 三 角 函 数

在复数范围内三角函数的研究可以完全依靠于指数函数的研究. 因为有 Euler 公式

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),\quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \tag{1}$$

所以映象 $w = \sin z$ 看成为以下四个映象

$$iz = z_1,\quad e^{z_1} = z_2,\quad z_3 = -iz_2\left(= \frac{e^{iz}}{i}\right) \tag{2}$$

及

$$w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right)(= \sin z) \tag{3}$$

的乘积. 首先我们来求使它成为单叶映照的条件. 命 D 为 z 平面上的域，经 (2) 而变为 D_1, D_2, D_3. 在 (2) 的三个映照中，第一第三都是单叶，第二映照是单叶的必需且充分条件是 D_1 中不包有适合于

$$z_1' - z_1'' = 2k\pi i,\quad k \text{ 整数 } (\neq 0) \tag{4}$$

的 z_1', z_1''. 由 §6 已知要映照 (3) 是单叶的必要且充分条件是 D_3 中不包有适合于

$$z_3'z_3'' = 1 \tag{5}$$

的 z_3', z_3''. 换为 z 平面，得 $w = \sin z$ 在区域 D 内是单叶的必要且充分条件是 D 内不包有适合于

$$z' - z'' = 2k\pi,\quad k \text{ 整数 } (\neq 0)$$

而且 $e^{i(z'+z'')} = -1$，即

$$z' + z'' = (2l + 1)\pi,\quad l \text{ 整数}$$

的 z', z''.

例如. 半带形 $-\pi < x < \pi$, $y > 0$ 就适合此条件. 其逐步变化情况如附图. 此带变为 w 平面带有两条切口，沿 u 轴从 -1 到 $+1$，沿 v 轴下部从 0 到 ∞；而 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ 变为上半平面.

正弦函数的反函数是

$$w = \arcsin z = \frac{\pi}{2} - i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})\left(= \frac{\pi}{2} - \arccos z\right).$$

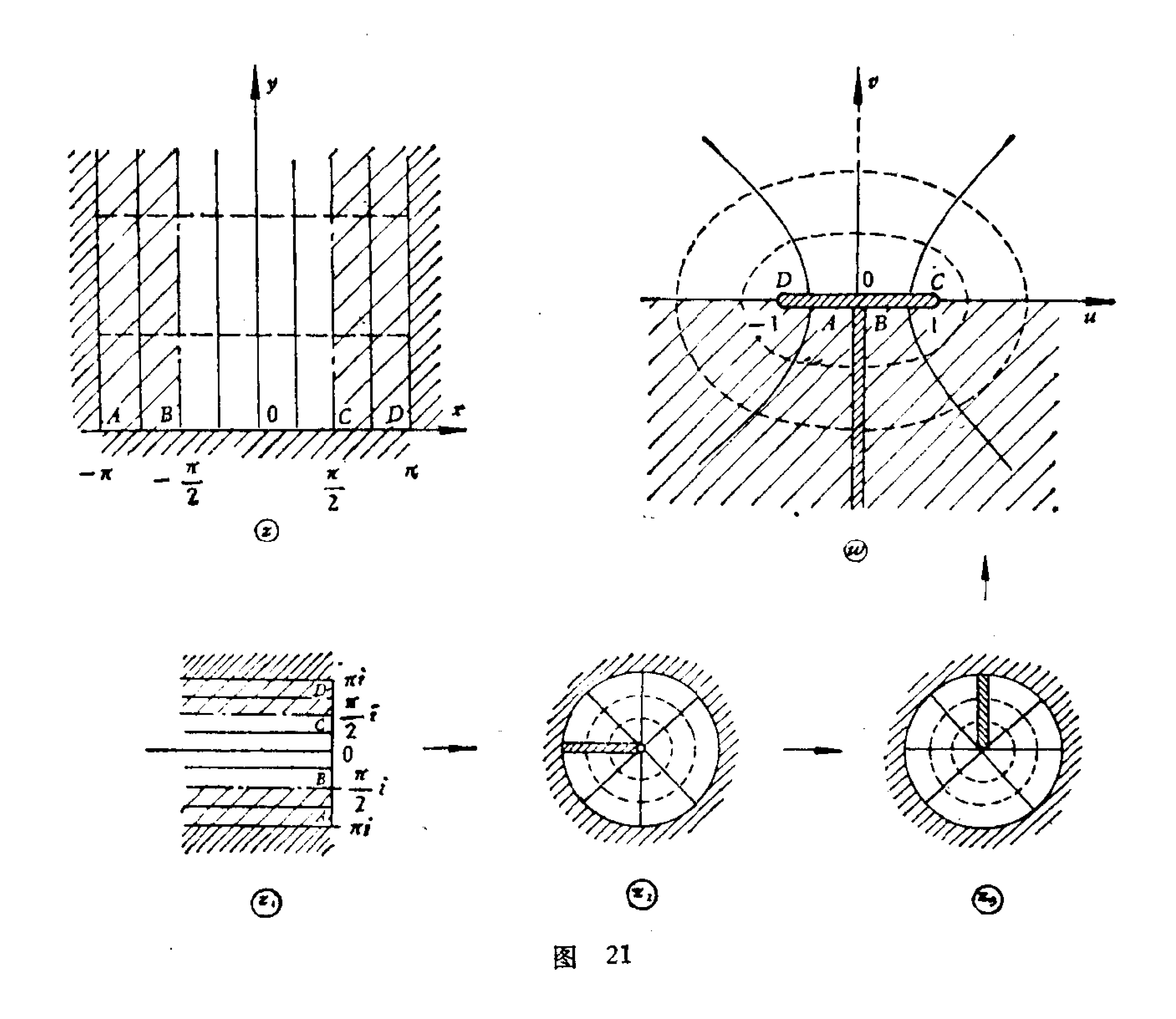


图 21

也可用 Riemann 面表示如下：把刚才所说过的映照一个一个地反转来，(3) 将说明是一个双页的 Riemann 面(见§6)．而 (2) 中第二映照是一个无穷页的 Riemann 面(见§7)．因而，它是无穷个面迭在一起，分别列号．划一切口沿实轴由 -1 到 1，把奇号平面与偶号平面如§6 法联上，再把平面沿 y 轴下部由 0 到 ∞ 的切口，把偶号片一片一片地如§7 法粘上，把奇号片也如此地粘上．

沿 $z=1$ 一周是从奇(或偶)号平面转入偶(或奇)号平面，函数值则由

$$\frac{\pi}{2}-i\ln(z\pm\sqrt{z^2-1})$$

变为 $\frac{\pi}{2}-i\ln(z\mp\sqrt{z^2-1})$．如果绕一含有 $z=1$，$z=-1$ 的大圆一周，则相当于由 $2n-1$ 号平面转入 $2n+1$ 号平面，或由 $2n$ 号平面入 $2n+2$ 号平面．

同样可以讨论余弦函数．

关于正切余切

$$\operatorname{arc\,tg} z=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg} z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

也是多值函数．

关于双曲函数及其反函数有

$$w=\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad z=\operatorname{sh}^{-1}w=\ln(w+\sqrt{w^2+1});$$

$$w=\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad z=\operatorname{ch}^{-1}w=\ln(w+\sqrt{w^2-1});$$

$$w = \operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad z = \operatorname{th}^{-1} w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w};$$

$$w = \operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, \quad z = \operatorname{cth}^{-1} w = \frac{1}{2} \ln \frac{w+1}{w-1};$$

它们都是多值函数. ln 可能是对数的任何分支. 如果取出单值分支，则每一分支都是解析函数.

§ 9. 一般的幂函数

函数 z^a 可以定义为

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

命 $z = \rho e^{i\varphi}$, $a = \alpha + i\beta$, 则

$$z^a = e^{\alpha \ln \rho - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta \ln \rho)}.$$

当 $\beta \neq 0$ 时，z^a 有无限多个值，它们在半径为 ρ_k 的圆周 $|w| = \rho_k$ 上. 这里

$$\rho_k = |z^a| = e^{\alpha \ln \rho - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

ρ_k 是一等比贯，其公比为 $e^{-2\pi\beta}$. 而 z^a 的幅角等于

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln \rho + 2k\pi\alpha,$$

是一个公差为 $2\pi\alpha$ 的等差贯.

当 $\beta = 0$ 时，即 a 是实数，则 z^a 的值在圆周

$$|w| = e^{a \ln \rho} = \rho^a$$

上. 如果 $\alpha = \frac{p}{q}$ 是一既约分数，则对于每个 z, z^a 正好可以取 q 个不同值，也就是

$$z^{\frac{p}{q}} = (z^p)^{\frac{1}{q}}.$$

θ_k 可以看为 $\frac{2\pi k}{q}$.

如果 a 是无理数，z^a 有无限多个数值. 不仅如此，我们可以证明 $e^{2k\pi a i}$ 成一点集，都在单位圆上，而且是一处处稠密的集合. 要证明此点只须证明以下的定理，即

如果 a 非有理数，则给任一 $\varepsilon > 0$, 我们有二整数 h 与 q 使

$$|ah - q| < \varepsilon.$$

这定理在第一卷中已经证明过了(第一卷第一分册 § 13, 定理 4).

§ 10. 保角变换的基本定理

有了一个解析函数 $f(z)$, 我们就可由之而得出一个保角变换来. 任何一个区域 D, 只要 $f(z)$ 在 D 内是单叶的，我们就可以把 D 用 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 保角地映照到一个区域 D^* 上去. 保角变换理论的基本问题是:

给了两个区域 D 与 D^*, 存在不存在一个保角变换把其一变为另一? 如果存在，求出把 D 变为 D^* 的函数 $f(z)$ 来.

显然并不是任何 D 都可以变为任何 D^* 的. 例如，D 是多连通而 D^* 是单连通. 要证

明此点，只要考虑D内一条闭曲线——包括有D的外点或边界点的闭曲线C. 如果有一保角变换把D变为D^*，则它把C变为C^*. 在D^*内C^*能连续地缩成一点$w_0(\in D^*)$，由于变换是连续的，因此C也将始终保持在D内而连续缩成为D内的某一点. 这显然是不可能的，因为C的内部有不属于D的点.

关于单连通域有以下的基本定理.

定理 1 (Riemann). 任何一个单连通域D，其边界多于一点，z_0是其一内点. 并且在此点有一方向矢量. 我们有保角变换把D一一的变为单位圆的内部，把z_0变为0点. 方向矢量变为实轴的正方向. 而且这样的变换仅有一个.

这定理的证明分为两部分 (i) 存在性，(ii) 唯一性. 关于唯一性，它实质上与以下的问题等价. 一个保角变换把单位圆变为其自己，而且把原点变为原点，把正轴方向变为正轴方向，则是一全等变换 $w = z$. 其理由是很显然的. 因为如果 $w = f(z)$ 与 $w = f_1(z)$ 都是适合定理 1 的保角变换，则 $w_1 = f(f_1^{-1}(w))$ 把单位圆变为单位圆，原点变为原点，正轴方向变为正轴方向. 因此，把原问题就化为刚才所提出的问题了.

不难看出定理 1 实际上与以下的较一般的定理是等价的.

定理 2. 任意两个单连通域D与D^*(它们的边界都是由多于一点的集合所构成的)，其中各取一任意点 z_0, w_0, 给与一实数 α_0, 一定有一个保角变换(单叶)

$$w = f(z)$$

把D变为D^*，使

$$w_0 = f(z_0), \quad \alpha_0 = \arg f'(z_0),$$

而且这样的保角变换只有一个.

如果特别取D^*为单位圆，$z_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, 则得定理 1. 反之，如果定理 1 已经证明，令 $w = f(z)$, $w = f^*(z)$ 是把D, D^*变为单圆的变换，则 $w = f^{*-1}(f(z))$ 把D变为D^*，因此不难推出定理 2 来.

定理 1 我们暂不证明，但是它是非常重要的. 因为它把一般的单连通域的问题，一变而为单位圆的问题了. 这是下一章中我们先把注意力集中到研究单位圆的道理. 这告诉我们如果单位圆研究清楚了，更一般的定理也就在望了.

再重复一句，整个的复平面(椭圆空间)是没有边界点的单连通域. 欧氏平面(抛物空间)是有一个边界点的单连通域. 而单位圆(双曲空间)是一个边界点多于一个的单连通域. 因此三种空间上的复变数函数论的研究有它的基本重要性.

第四章 调 和 函 数

§1. 中 值 定 理

定理 1. 如果 $u(z)$ 是一个在闭圆 $|z|\leqslant\rho$ 上连续的，在圆内是调和的函数，则

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta. \tag{1}$$

证. 由于闭圆 $|z|\leqslant\rho$ 是单连通域，因此 $u(z)$ 有一个单值的共轭函数 $v(z)$. 若 $\rho_1<\rho$，由

$$\rho_1\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho_1 e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho_1\frac{\partial}{\partial\rho_1}u d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}v(z)d\theta=\frac{1}{2\pi}v(\rho_1 e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi}=0.$$

即 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho_1 e^{i\theta})d\theta$ 是一常数，命 $\rho_1\to 0$ 及 $\rho_1\to\rho$ 即得所求.

定理 1 有以下的重要直接推论

定理 2. 如果 $f(z)$ 在一个闭圆 $|z|\leqslant\rho$ 上是连续的，在圆内是解析的，则

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})d\theta.$$

(由于 $f(z)=u(z)+iv(z)$，而 $u(z)$，$v(z)$ 都是调和函数，因此 $f(z)$ 也是调和函数(复值). 读者也可分别考虑 $u(z)$，$v(z)$，然后总加得之.)

定理 2 中，用 $z=\rho e^{i\theta}$，$dz=i\rho e^{i\theta}d\theta=izd\theta$ 可以推得

定理 3. 仍如定理 2 的假定，

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z}dz.$$

又 $zf(z)$ 也是解析的，因此得

定理 4. 仍如定理 2 的假定，

$$\int_{|z|=\rho}f(z)dz=0.$$

我们现在把以原点为中心的圆换为任意的圆，则得

定理 5 (中值定理). 如果 $u(z)$ 是一个在以 z_0 为中心，以 ρ 为半径的闭圆上连续，并且在圆内是调和的函数，则圆心的函数值等于圆周上的函数值的平均值；也就是

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

定理 6. 如果 $f(z)$ 是一个在以 z_0 为中心，以 ρ 为半径的闭圆上连续，并在圆内解析的函数，则

$$\int_C f(z)dz=0.$$

这儿 C 表示圆周上的积分.

§2. Poisson 公式

变形

$$w = e^{i\psi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{1}$$

把单位圆变为单位圆,把 $z=a$ 变为 $w=0$, 而且

$$dw = e^{i\psi}\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz. \tag{2}$$

命 $w=e^{i\theta}$, $z=e^{i\tau}$, 则

$$d\theta = \frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}z|^2}d\tau. \tag{3}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(w)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}z|^2}u_1(z)d\tau.$$

这里 $u_1(z)=u\left(e^{i\psi}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$, 于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}u_1(z)d\tau = u_1(a).$$

命 $a=re^{i\theta}$ 及 $z=e^{i\psi}$, 则得

定理 1. 如果 $u(z)$ 是一个在圆 $|z|\leqslant 1$ 上连续, 并在圆内调和的函数, 则当 $0<r<1$ 时有

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}u(e^{i\psi})d\psi. \tag{4}$$

也就是对单位圆内任一 z, 我们有

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-i\psi}|^2}u(e^{i\psi})d\psi. \tag{5}$$

对一般圆来说,如果把单位圆改为以 R 为半径的圆 $|z|\leqslant R$, 则得 Poisson 公式

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\psi)+r^2}u(Re^{i\psi})d\psi. \tag{6}$$

函数

$$P(re^{i\theta}) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\psi)+r^2} \tag{7}$$

称为圆 $|z|\leqslant R$ 的 Poisson 核. 还是回到单位圆, Poisson 核有以下的一些性质:

(i) 圆内非负性. Poisson 核有绝对值形式的表达式

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2},\quad w=e^{i\psi},\quad z=re^{i\theta}. \tag{8}$$

当 $|z|<1$ 时这是正的.

(ii) 周上奇异性. 在圆上(即 $r=1$ 时),当 $\psi\neq\theta$ 时 $P(re^{i\theta})=0$.

当 $\psi=\theta$ 时,我们一般有

$$P(re^{i\theta})=\frac{1+r}{1-r}.$$

当 $r\to 1$ 时，$P\to\infty$.

更精确些：命 ψ_0 是一个给定的值，对于任一 $\varepsilon>0$，我们有一 $r_0(<1)$ 及一 $\delta(>0)$ 存在，使 $r>r_0$ 及 $|\psi_0-\theta|<\delta$ 时，对一切适合于 $|\psi-\psi_0|>2\delta$ 的 ψ

$$0\leqslant P(re^{i\theta})=\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\psi-\theta)}|^2}<\varepsilon.$$

要证此点，可看由 $|\theta-\psi|>\delta$ 得

$$\left|\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\psi)}\right|\leqslant\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta}.$$

当 r 充分接近于 1 时，此值小于 ε.

(iii) 均值等于 1. 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(re^{i\theta})d\theta=1. \tag{9}$$

这个结果是由 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=1$ 经变形 (3) 变来的.

综合 (ii) 与 (iii)，$P(re^{i\theta})$ 是一函数，在周界上除一处外，处处为 0，在该处变为无穷，其平均值作为 $r\to 1$ 时的极限是等于 1，这与“δ 函数”有相似处.

(iv) $P(re^{i\theta})$ 是调和函数. Poisson 核还有一实部表示法

$$P(re^{i\theta})=\frac{1}{2}\left(\frac{w+z}{w-z}+\frac{\bar{w}+\bar{z}}{\bar{w}-\bar{z}}\right)=\mathbf{R}\,\frac{w+z}{w-z}. \tag{10}$$

由于 $\frac{w+z}{w-z}$ 在圆内是一解析函数，因此 $P(re^{i\theta})$ 是一调和函数.

(v) $P(re^{i\theta})$ 的共轭函数是

$$Q(re^{i\theta})=I\,\frac{w+z}{w-z}=\frac{2r\sin(\theta-\psi)}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}+C. \tag{11}$$

因此 u 的共轭函数等于

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\psi})\frac{2r\sin(\theta-\psi)}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}d\psi+C.$$

由此推出，Schwarz 积分

$$f(z)=u(z)+iv(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\psi})\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}d\psi+iC. \tag{12}$$

同样，$v(z)$ 也是调和函数，它的共轭函数是 $-u(z)$，因此

$$v(z)-iu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(e^{i\psi})\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}d\psi+iD. \tag{13}$$

以 i 乘 (13) 而加入 (12)，则得

$$2f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\psi})\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}d\psi-D+iC. \tag{14}$$

命 $z=0$，由 § 1 定理 2 可得

$$f(0)=-D+iC=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\psi})d\psi.$$

代入(14)得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\psi})\frac{e^{i\psi}d\psi}{e^{i\psi}-z}.$$

即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \tag{15}$$

这就是 Cauchy 公式.

(vi) 若 $\varphi(\zeta)$ 是在 $|\zeta|=1$ 上的连续函数,我们称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

为 Cauchy 型积分. 显然,在单位圆内外表示解析函数,取

$$z=re^{i\theta},\ 0<r<1,\ z^*=\frac{1}{\bar z}=\frac{1}{r}e^{i\theta}.$$

于是

$$F(z)-F(z^*)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)d\zeta.$$

若 $\zeta=e^{i\psi}$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)d\zeta=\frac{1}{2\pi}P(re^{i\theta})d\psi.$$

于是

$$F(z)-F(z^*)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(re^{i\theta})\varphi(\zeta)d\psi.$$

于是当 $r\to 1$ 时,我们有

$$\lim_{r\to 1}(F(z)-F(z^*))=\varphi(e^{i\theta}).$$

也就是 Cauchy 型积分从内外趋于边界时之差,就是原来在边界上给定的函数值. 这个公式称为 Сохоцкий 公式.

(vii) Poisson 核是变换的对数法向微商.

$$w_1=\frac{w-z}{1-\bar z w},\quad w=\rho e^{i\psi}$$

是把 z 变为 0 的变形. 我们研究

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\left(\frac{w-z}{1-\bar z w}\right)=\frac{e^{i\psi}}{w-z}+\frac{e^{i\psi}\bar z}{1-\bar z w}=\frac{(1-|z|^2)e^{i\psi}}{(w-z)(1-\bar z w)}.$$

当 $\rho=1$ 时

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\left(\frac{w-z}{1-\bar z w}\right)_{\rho=1}=\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}=P(re^{i\theta}).$$

我们可以不必引进 ρ 来,而直接定义为: 函数

$$\ln\left(\frac{w-z}{1-\bar z w}\right),\quad w=e^{i\psi}$$

在圆周上法向微商就是 $-P(re^{i\theta})$. 或记之为

$$P(re^{i\theta})=-\frac{\partial}{\partial n}\ln\left|\frac{w-z}{1-\bar z w}\right|=\frac{\partial}{\partial n}\ln\left|\frac{1-\bar z w}{w-z}\right|.$$

函数 $\ln\left|\frac{1-\bar{z}w}{w-z}\right|$ 称为 Green 函数. 这函数的特点是作为 w 的函数，在圆内部处处调和,而仅当 $w=z$ 时不然. 在圆周 $|w|=1$ 上,此函数处处为 0.

(viii) 调和测度. 命

$$\mathbf{W}(z, \phi_1, \phi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{\phi_2}^{\phi_1}\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\phi-\theta)}|^2}\,d\phi.$$

不难证明,它可以用 $e^{i\phi_1}$, $e^{i\phi_2}$, z, $\bar{z}^{-1}$ 四点的交比表达出来(参考 § 5).

§ 3. 奇 异 积 分

(这节的内容已在第一卷介绍过了,但为了读者方便添上此节.)

定理 1. 假定 $Q(z, \zeta)$ 是一实函数,其中

$$z=re^{i\varphi},\ \zeta=e^{i\phi},\ 0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi,\ \phi<2\pi.$$

假定 $Q(z, \zeta)$ 有以下一些性质:

(i) 非负连续函数.

(ii) 对任一 z 常有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(z, \zeta)d\phi=1. \tag{1}$$

(iii) 当 $z\to\zeta_0=e^{i\phi_0}$ 而 $\zeta\neq\zeta_0$ 时, $Q(z, \zeta)$ 一致趋于 0. (即任一 $\varepsilon>0$, 我们有 $\rho<1$ 及 $\delta>0$ 使 $r>1-\rho$ 及 $|\varphi-\phi_0|<\delta$, 这时, 对一切使 $|\phi-\phi_0|>2\delta$ 的 z, ζ 来说,常有 $0\leqslant Q(z, \zeta)<\varepsilon$.)

结论: 如果对任一仅有第一类间断点的逐段连续的实函数 $u(\zeta)$, 及 $u(\zeta)$ 在 ζ_0 处连续,则

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)Q(z, \zeta)d\phi=u(\zeta_0). \tag{2}$$

证. 由性质 (ii), 结论可以改为证明: 当 $z\to\zeta_0$ 时,

$$\Delta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(\zeta)-u(\zeta_0))Q(z, \zeta)d\phi\to 0.$$

给一 $\varepsilon>0$, 由连续性,可以选 $\delta>0$, 使

$$|\phi-\phi_0|<2\delta$$

时,

$$|u(\zeta)-u(\zeta_0)|<\varepsilon.$$

把积分拆成为两部分

$$\Delta=\frac{1}{2\pi}\int_{|\phi-\phi_0|<2\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{|\phi-\phi_0|>2\delta}=\Delta_1+\Delta_2.$$

首先

$$|\Delta_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|\phi-\phi_0|<2\delta}Q(z, \zeta)d\phi\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(z, \zeta)d\phi=\varepsilon.$$

其次, 假定 $|\varphi-\phi_0|<\delta$, 则由 $|\phi-\phi_0|>2\delta$ 可知 $|\varphi-\phi|>\delta$. 由条件 (iii), 有一正数 $\rho<1$, 使所有这样的 ϕ 及当 $r>1-\rho$ 时,常有不等式

$$Q(z, \zeta) < \varepsilon.$$

即

$$|\Delta_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\psi-\psi_0|>2\delta} |u(\zeta) - u(\zeta_0)| Q(z, \zeta) d\psi < \frac{\varepsilon}{2\pi} 2M(2\pi - 2\delta) \leqslant 2\varepsilon M.$$

这儿 M 是 $|u(\zeta)|$ 在圆周上的最大值.

合起来就证明了本定理.

§4. Dirichlet 问 题

问题：在单位圆上给了一个函数 $u(\zeta)$. 除掉有限个点 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 之外，这函数是处处连续的. 在这些例外点，$u(\zeta)$ 有第一类间断点. 求出单位圆内的有界调和函数 $u(\zeta)$，在非例外各点，都与所给的 $u(\zeta)$ 相等.

这是有名的 Dirichlet 问题的特例（一般问题是任意域的边界代替单位圆）. 解法极易. 因为由 $u(\zeta)$ 可以作 Poisson 积分

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\psi}) u(\zeta) d\psi.$$

由上节的定理可知这就是问题的解答了.

如果我们假定了保角变换基本定理，我们这儿所解决的问题实际上是一般单连通域的 Dirichlet 问题.

关于例外点的趋限情况，我们先用以下的简单例子来说明. 在单位圆内函数

$$f(z) = \arg(1 - z)$$

是调和的. 并且假定 $z = 0$ 时，$f(z) = 0$. 我们现在看从圆内趋于 1 的情况. 命

$$z = 1 - \rho e^{i\theta}, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \rho > 0,$$

则

$$f(z) = \theta$$

在圆周上除 $z = 1$ 外 $f(z)$ 处处连续. 当 $z = 1$ 时，即当 $\rho \to 0$ 时，$f(z)$ 能趋近于 $-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$ 之间的任何一数. 有一个第一类间断点，其跃距为 $-\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

现在我们可以作出一个圆内调和，周界上连续，但在例外点 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 有跃距为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的第一类间断点的函数

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\pi} \arg(z - \zeta_k).$$

如果 $u(z)$ 是任一有以上性质的调和函数，则

$$u(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\pi} \arg(z - \zeta_k)$$

是一个边界上连续的函数了. 因此在间断点，$u(z)$ 可以取左右极限之间的任一数值.

§5. 上半平面的 Dirichlet 问题

在实轴上给了一个有有限个间断点的有界函数 $u(t)$. 要求出一个上半平面调和的函

数 $u(z)$，在边界的连续点上 $u(z)=u(t)$.

作一变形，它把单位圆 $|w|<1$ 变为上半平面 $I(\zeta)>0$

$$w=\frac{\zeta-z}{\zeta-\bar{z}}. \tag{1}$$

命 $w=e^{i\tau}$，则

$$e^{i\tau}=\frac{t-z}{t-\bar{z}}.$$

因而

$$e^{i\tau}d\tau=\frac{2y}{(t-\bar{z})^2}dt,$$

$$d\tau=\frac{2ydt}{(t-z)(t-\bar{z})}=\frac{2ydt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{2}$$

命 $U(w)=u(\zeta)$，中值公式

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(e^{i\tau})d\tau$$

经 (1) 而变为

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{3}$$

这就是上半平面的 Poisson 积分公式，正是我们所要的解.

由于

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=\mathbf{R}\frac{1}{i(t-z)},$$

因此，Schwarz 积分变为

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)dt}{t-z}.$$

这称为 Hilbert 积分. 注意这一积分的收敛，仅仅假定了 $u(t)$ 有界是不够的. 还要假定当 $|t|\to\infty$ 时，函数的某种性质，例如 $u(t)$ 趋于 0 的速度不慢于 $\frac{1}{|t^\alpha|}$，$(\alpha>0)$.

例 1. 假定当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时 $u(t)=1$，而其它处等于 0，所对应的调和函数

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta-x}{y}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha-x}{y}\right).$$

它的几何意义是向量 $z-\alpha$ 与 $z-\beta$ 与 x 轴所成的交角 φ_α，φ_β 之差除以 π. 也就是 $\angle\alpha z\beta=\omega$ 除以 π. 用交比表出之

$$(\alpha,\beta,z,\bar{z})=\frac{z-\alpha}{\beta-z}\Big/\frac{\bar{z}-\alpha}{\beta-\bar{z}}=e^{-2i\omega}.$$

同时 $u(z)$ 是函数

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\beta-z}{\alpha-z}$$

的实部.

例 2. 推广上例. 假定 $u(t)$ 在

$$(-\infty,a_1),\ (a_1,a_2),\cdots,\ (a_n,\infty)$$

上分别取常数值 $u_0, u_1, \cdots, u_n$，则

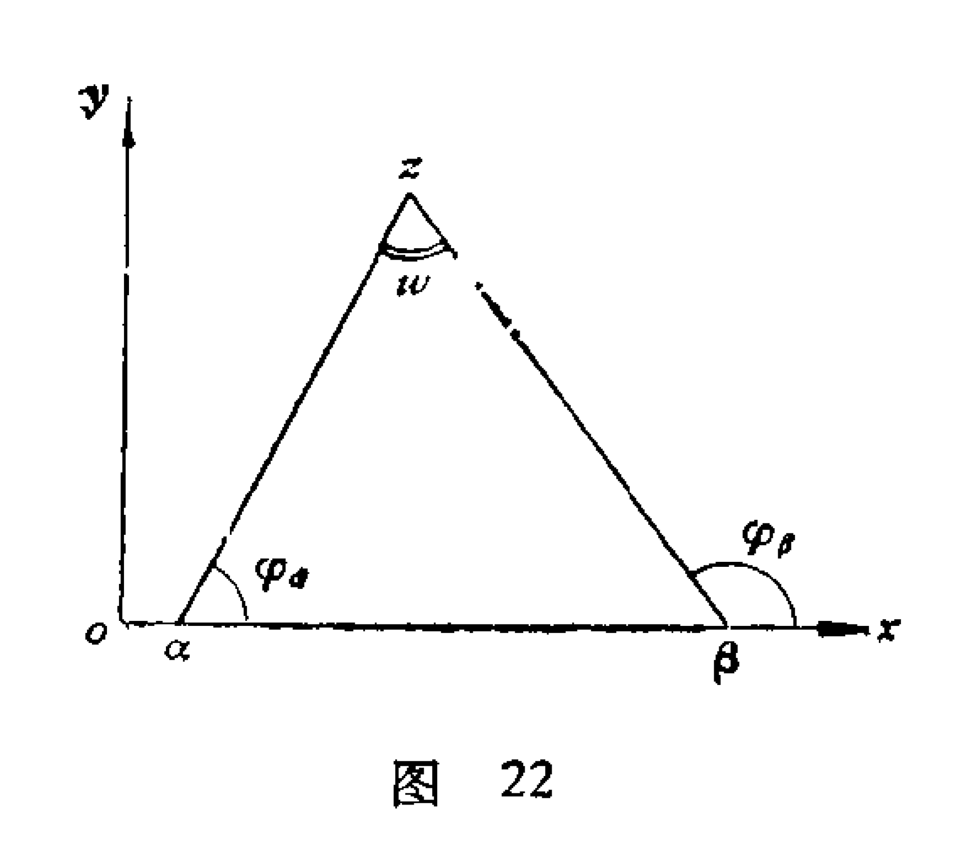


图 22

$$u(z)=\frac{\varphi_1 u_0}{\pi}+\frac{u_1}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+\frac{u_n}{\pi}(\pi-\varphi_n)$$

$$=\frac{\varphi_1}{\pi}(u_0-u_1)+\frac{\varphi_2}{\pi}(u_1-u_2)+\cdots$$

$$+\frac{\varphi_n}{\pi}(u_{n-1}-u_n)+u_n.$$

习题．用

$$w=\operatorname{th}\frac{\pi z}{4h}$$

把圆 $|W|<1$ 变为带形区域 $-h<Iz<h$．试证：公式

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(e^{i\tau})\frac{e^{i\tau}+w}{e^{i\tau}-w}d\tau+iC$$

变为 $F(z)=f(w)$，$U(z)=u(w)$．

$$F(z)=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_+(t)+U_-(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(t-z)}dt-\frac{i}{4h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_+(t)-U_-(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi(t-z)}{2h}}dt+iC.$$

这儿 $U_\pm(t)$ 表示 $u(\zeta)$ 在点 $\zeta=t\pm ih$ 处之值．（这在 1896 年 Д. А. Граве 的《制图学》中出现过．）

§6. 调和函数的展开式

仍然讨论单位圆．由于 Poisson 核有展开式

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{w+z}{w-z}+\frac{\bar w+\bar z}{\bar w-\bar z}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}(1+\bar w z(1-\bar w z)^{-1}+w\bar z(1-w\bar z)^{-1})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar w z)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(w\bar z)^n\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\psi)\right).$$

这里 $z=re^{i\theta}$，$w=e^{i\psi}$．这级数当 $0\leqslant r\leqslant r_0<1$ 时是一致收敛的．因此

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}u(e^{i\psi})d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\psi})\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(\cos n\theta\cos n\psi+\sin n\theta\sin n\psi)\right)d\psi$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n.$$

此处

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})d\phi,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})\cos n\phi d\phi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})\sin n\phi d\phi.$$

因此得出：如果 $u(e^{i\theta})$ 有 Fourier 展开式

$$u(e^{i\theta})\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\tag{1}$$

则以 $u(e^{i\theta})$ 为边界值的调和函数等于

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n.\tag{2}$$

但需注意，虽然假定了 $u(e^{i\theta})$ 是连续函数，却并不保证 (1) 的收敛性. 但 (2) 的收敛是保证了的. 另一方面，如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$，则 (2) 收敛. 但 (1) 可能不收敛. 不但不收敛，有时还不知有何求和法可知其为某一函数.

再看单位圆内的解析函数 $f(z)$. 若 $|z|<1$，$\zeta=e^{i\theta}$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}(\bar{\zeta}z)^n d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.\tag{3}$$

此处

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta.$$

也就是任一单位圆内解析的函数有幂级数 (3) 来表达. 即如果 $f(e^{i\theta})$ 有 Fourier 级数

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{in\theta},$$

则有一单位圆内的解析函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.$$

由此可见，解析函数的微商是存在的，而且仍然是解析函数.

§7. Neumann 问 题

在一些应用中，我们需要考虑所谓第二边界值问题，也称为 Neumann 问题. 我们仍然只考虑单位圆的情况. 在周界上给了

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\varphi(\theta),\tag{1}$$

求适合此条件的调和函数.

假定 $\varphi(\theta)$ 有 Fourier 级数

$$\varphi(\theta)\sim\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta).\tag{2}$$

假定

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n.$$

代入 (1) 中

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta).$$

比较后可知 c_0 必须为 0, 而且 $a_n = \frac{c_n}{n}$, $b_n = \frac{d_n}{n}$. 这一比较得出:

(i) $\varphi(\theta)$ 必须适合条件

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = 0$$

方能有解;

(ii) 解的形式是

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)r^n. \tag{3}$$

关于 (i), 确应如此,因为由

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta\Big|_{r=1} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta = 0,$$

可知此条件必不可少. 有了这一条件,解答 (3) 可以写成为

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(\phi)(\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \cos n\theta)d\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\phi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}r^n d\phi.$$

此处 a_0 为任意常数. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\tau}}{n}r^n = -\log(1-e^{i\tau}r),$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\tau}{n}r^n = -\frac{1}{2}\log(1-e^{i\tau}r)(1-e^{-i\tau}r)$$

$$= -\frac{1}{2}\log(1-2r\cos\tau + r^2).$$

因此

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\phi)\log(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)d\phi. \tag{4}$$

读者试自己找出在什么条件下,这积分成立,并且 $\lim\limits_{r\to 1}\frac{\partial u}{\partial r} = \varphi(\theta)$.

条件 (1) 也可以看成为

$$r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial v}{\partial \theta}\Big|_{r=1} = \varphi(\theta).$$

即可假定 $v\Big|_{r=1} = \int_0^{\theta}\varphi(\tau)d\tau = \psi(\theta)$, 化为求 $v(re^{i\theta})$ 的 Dirichlet 问题来处理.

§8. 最大值最小值原理

定理 1. 一个不为常数的调和函数，不可能在其定义域的内点处达到其最大值(或最小值).

证. 只需证明最大值的情况就够了,因为 $u(z)$ 的最大值便是 $-u(z)$ 的最小值.

假定 z_0 是内点,而且 $u(z_0)$ 取最大值. 当 r 充分小时,有中值公式

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

这定理是以下定理的推论.

定理 2. 一个连续函数的平均值一定在函数的最大值与最小值之间,如果它等于最大或最小值,则此函数是一常数.

证. 假定 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 间的连续函数,其平均值为

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

如果 m 是 $f(x)$ 的最大值,而 $f(x)$ 非常数，则一定有一点 x_0, $f(x_0)<m$. 即存在一区间 $|x-x_0|\leqslant\delta$, 其中 $f(x)<m$. 如此则

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\frac{m}{b-a}\left(\int_a^{x_0-\delta}+\int_{x_0+\delta}^b\right)<\frac{m}{b-a}\int_a^b dx=m.$$

而这是不可能的.

由此定理推得: 如果 $u(z_0)$ 是最大值, 则 $u(z_0+re^{i\theta})=u(z_0)$. 即在一个小圆的周界上是常数. 由 Poisson 公式可知，其中无处非常数. 即在这小圆内取常数值. 我们现在证明在区域内任一点皆取常数值.如果在 $u(z_1)\neq u(z_0)$ 作一条由 z_0 到 z_1 的曲线. 在此曲线上一定有一点 z_2 首先使其任意小邻域内有 z, 使 $u(z)\neq u(z_0)$. 在 z_2 作一小圆其中必有取值 $u(z_0)$ 的点. 在此小圆内一定有一点取最大值. 因而在这小圆内也是常数. 与假定相矛盾.

定理 3(最大模原理). 一个非常数的函数在 D 内是解析的,在 D 上是连续的,则它的绝对值的最大值不可能在内点取.

证. 已知

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

即得

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta.$$

与定理 2 的证法相同即得出定理.

注意. 由于上式之间是不等号"$\leqslant$",所以我们仅能得出最大模不能在区域内取,而不能证明最小模不在区域内取.

§9. 调和函数贯

定理 1. 给一个在 D 内调和，$\bar{D}$ 上连续的函数贯

$$u_0(z), u_1(z), \cdots, u_n(z), \cdots.$$

如果 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ 在 D 的边界上一致收敛，则在 $\bar{D}$ 上这级数也一致收敛．而且它的和是一个 D 内的调和函数．

证．由假定可知，给了任一 $\varepsilon>0$，有 N 存在，使 $n>N$ 时，对边界上的一切点 ζ，

$$|u_{n+1}(\zeta)+\cdots+u_{n+p}(\zeta)|<\varepsilon.$$

根据最大最小值原理，对 $\bar{D}$ 内的一切 z，

$$|u_{n+1}(z)+\cdots+u_{n+p}(z)|<\varepsilon.$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ 在 $\bar{D}$ 上是一致收敛的．

现在还需要证明的是这级数的和是一个调和函数．命 z_0 是 D 内的任一点．以 z_0 为中心作一圆，令此圆全在 D 中．在此圆中 $u_k(z)$ 是调和的．命 $U_k(z)=u_k(z+z_0)$，则 $U_k(z)$ 在以 0 为中心的圆内是调和的．Poisson 公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}U_k(Re^{i\phi})d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\sum_{k=0}^{\infty}U_k(Re^{i\phi})d\phi.$$

级数 $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(Re^{i\phi})$ 是一个连续函数，因此右边表示一个调和函数．即 D 内任一点都是调和的，而且在 $\bar{D}$ 上是连续的．

§10. Schwarz 引理

定理 1. 假定单位圆内解析函数

$$w=f(z)$$

把单位圆映照到单位圆内，而且把原点变为原点，则把半径为 $r(<1)$ 的圆也映照到半径为 r 的圆内．这结论也可以改述为：

如果当 $|z|\leqslant 1$ 时 $|f(z)|\leqslant 1$ 及 $f(0)=0$，则 $|f(re^{i\theta})|\leqslant r$（即 $|w|\leqslant|z|$）．（由于最大模原理，可以将假定改弱为“如果当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|\leqslant 1$”．）

还可以补充一点，当而且仅当 $f(z)=e^{i\theta}z$ 时取等号．

证．在 $|z|\leqslant 1$，$f(z)$ 有一级数展开式．由 $f(0)=0$，所以 $\frac{f(z)}{z}$ 也有一级数展开式．因而在单位圆内 $\frac{f(z)}{z}$ 是一个解析函数．由假定

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant 1,$$

由最大模原理

$$\left|\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\right| \leqslant 1,$$

即得定理．如取等号，则 $\frac{f(z)}{z}$ 是一绝对值等于 1 的常数．

经过简单的换变数可以把定理 1 推广为

定理 2. 假定 $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R$ 上是解析的，而且

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \leqslant M, \ f(0) = 0,$$

则当 $0 \leqslant r \leqslant R$ 时，有

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \frac{Mr}{R}.$$

还是回到单位圆的情况．如果用非欧距离的符号，则定理 1 的结论 $|w| \leqslant |z|$ 可以改写为

$$D(0, w) \leqslant D(0, z). \tag{1}$$

由于非欧距离的不变性，及任一点都可以变为 0，因此立刻推出

定理 3 (Pick). 假定 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数，而在 $|z| \leqslant 1$ 内 $|f(z)| \leqslant 1$. 命 z_1, z_2 为单位圆内的任意二点，则

$$D(f(z_1), f(z_2)) \leqslant D(z_1, z_2). \tag{2}$$

而且，当且仅当 $w = f(z)$ 是一非欧运动时，上式取等号．

证．有一非欧运动把 (z_1, z_2) 变为 $(0, z^*)$．又有一非欧运动把 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ 变为 $(0, w^*)$．这样 $w = f(z)$ 变为 $w^* = f_1(z^*)$ 也是一个变形，把单位圆 $|z^*| < 1$ 变为 $|w^*| < 1$，且 $f_1(0) = 0$．因此 $|w^*| \leqslant |z^*|$．即 $D(0, w^*) \leqslant D(0, z^*)$．因而

$$D(w_1, w_2) = D(0, w^*) \leqslant D(0, z^*) = D(z_1, z_2).$$

取等号的情况也不难推出．

更广泛一些：一条由 a 至 b 的曲线 F (在单位圆内)的非欧长度等于

$$L(\Gamma) = \int_a^b \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

如果把曲线分为 n 份，每份用短程线的长度来代替，当 $n \to \infty$，这样总长度就趋近于 $L(\Gamma)$．因此，由定理 3 立刻可以推出

定理 4 (Pick). 假定 $f(z)$ 仍然适合于定理 3 的假定．假定 $w = f(z)$ 把单位圆内的曲线 Γ_z 变为曲线 Γ_w，则

$$L(\Gamma_w) \leqslant L(\Gamma_z). \tag{3}$$

当且仅当 $w = f(z)$ 是非欧运动时，上式取等号．

把 (2) 写得更清楚些：

$$\frac{1}{2}\log\frac{|1 - \bar{w}_1 w_2| + |w_2 - w_1|}{|1 - \bar{w}_1 w_2| - |w_2 - w_1|} \leqslant \frac{1}{2}\log\frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

这不等式与不等式

$$\left|\frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2}\right| \leqslant \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| \tag{4}$$

等价．当 $z_2 \to z_1$ 时，得

$$\lim_{z_2 \to z_1}\left|\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right|\left|\frac{1}{1 - |w_1|^2}\right| \leqslant \frac{1}{1 - |z_1|^2}.$$

换符号得

定理 5. 仍如定理 3 的假定，则当 $|z| < 1$ 时，

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{5}$$

这定理的特例：当 $f(0) = 0$ 时，$|f'(0)| \leqslant 1$ 已由定理 1 直接推出．

附记．如果圆内有一点使 (4) 式取等号，则 (4) 就取等号．$w = f(z)$ 就是非欧运动．（读者试自己证明之．）

又由于

$$\int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1), \quad \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2},$$

立刻推出

定理 6. 仍如定理 3 的假定，当 $|z_1| < r < 1$，$|z_2| < r < 1$ 时，

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqslant \frac{1}{1 - r^2}.$$

习题．仍如定理 3 的假定，证明，当 $|z| < 1$ 时，

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|}.$$

§ 11. Liouville 定理

作为 Schwarz 引理的第一个应用：

定理 1. 如果 $F(z)$ 是一个全平面上无处不解析的函数，而且常有 $|F(z)| < M$，则 $F(z)$ 是一常数．

证．对任一 $R > 0$ 作函数

$$f(u) = \frac{F(z) - F(0)}{2M}, \quad z = Ru.$$

由 Schwarz 引理，当 $|u| < 1$ 时，

$$|f(u)| \leqslant |u|.$$

即对任一 $R > 0$，当 $|z| < R$ 时，

$$|F(z) - F(0)| \leqslant \frac{2M}{R}|z|.$$

命 $R \to \infty$，则得 $F(z) = F(0)$，即得定理．

更广泛些

定理 2. 如果 $F(z)$ 是一个全平面上无处不解析的函数，而且当 $z \to \infty$ 时，

$$F(z) = O(|z|^k),$$

则 $F(z)$ 是一个次数不高于 k 的多项式.

证. 由于解析性，$F(z)$ 可以在原点展开成为

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots.$$

命 $a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k = P(z)$. 考虑函数

$$f(z) = \frac{F(z) - P(z)}{z^k},$$

由定理 1 即得定理

定理 3 (代数基本定理). 任何一个多项式一定有一个零点，也就是任何一个代数方程式至少有一个根.

证. 如果 $f(z)$ 是一个多项式而没有零点，即 $f(z) = 0$ 无解，考虑函数

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}$$

是一个无处不解析的函数. 因而得出矛盾.

§ 12. 保角变换的唯一性

定理 1 (双曲几何的基本定理). 把单位圆一对一地变为其自己的保角变换一定是非欧运动.

由于在非欧运动群下，单位圆是可递的. 因此如能证明："把单位圆一对一地变为其自己而且使原点不变的保角变换一定是 $w = e^{i\theta}z$" 即足. 由假定: 当 $|z| \leqslant 1$ 时 $|f(z)| \leqslant 1$，而且 $f(0) = 0$. 因此

$$|w| = |f(z)| \leqslant |z|.$$

由于是一对一的保角变换，因此 $w = f(z)$，也可以表成为 $z = g(w)$. 即得 $|z| \leqslant |w|$. 因此 $|w| = |z|$，所以 $w = e^{i\theta}z$.

由此推得

定理 2. 把单位圆一对一地变为其自己的，而且"一点带一方向"变为"一点带一方向"的保角变换是唯一的.

定理 3. 命 D 是一任一单连通域. 假定有一个保角变换

$$w = f(z)$$

对应地把 D 变为单位圆 $|w| < 1$，把 D 内一点 z_0 及一方向变为单位圆内的原点及 x 轴正向，则这样的变形是唯一的.

因此，证明了 Riemann 基本定理的唯一性部分.

§ 13. 映 进 映 照

定义. D 是一个区域，如果保角变换

$$w = f(z)$$

把 D 映照到 D 或其一部分，则称为映进映照.

以上所讲过的定理可以改讲成为:

一个 Лобачевский 空间的映进映照，一定把非欧长度愈变愈短，当且仅当非欧运动时长度才能不变.

如果D是由单位圆 $|w|<1$ 经过保角变换

$$w=w(z)$$

变出来的区域，则在D空间的度量有

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|w'(z)||dz|}{1-|w(z)|^2}.$$

命Γ是D内的一条曲线. 这曲线的长度等于

$$L(\Gamma)=\int_\Gamma\frac{|w'(z)||dz|}{1-|w(z)|^2}.$$

则由定理 5 推出D的任何一个映进映照一定不会把 $L(\Gamma)$ 变大.

§ 14. 单连通域的 Dirichlet 问题

假定 $w=w(z)$ 是一个一一对应的保角变换，它把一个域D变为单位圆 $|w|<1$，把 z_0 变为 $w=0$. 并且假定它的周界C是由一个有限条有连续切线的曲线所合成的. 并且当 z 沿C变化时，w 画单位圆周. 而且对D的周界长度参数 s 来说，这变形是有连续微商的.

我们现来考察一下，调和函数的中值公式

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)d\theta,\quad \zeta=e^{i\theta}. \tag{1}$$

经过变形 $w=w(z)$ 变为什么? 由于

$$dw=w'(z)dz,\quad |dw|=|w'(z)||dz|,$$

可知

$$d\theta=|w'(z)|ds.$$

命 $u(w)=U(z)$, $u(0)=U(z_0)$, 得

$$U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C U(z)|w'(z)|ds. \tag{2}$$

我们现在来变化 $|w'(z)|$.

引理 1. 在曲线 $|w(z)|=1$ 上

$$-\frac{\partial}{\partial n}\log|w(z)|=|w'(z)|. \tag{3}$$

证. 先由 Cauchy-Riemann 条件的广义形式可以推出

$$\frac{\partial}{\partial n}w(z)=i\frac{\partial}{\partial s}w(z), \tag{4}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|w(z)|=\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial n}\log w(z)\right)=\mathbf{R}\left(i\frac{w'(z)}{w(z)}\frac{dz}{ds}\right). \tag{5}$$

另一方面，由

$$w(z)\overline{w(z)}=1, \tag{6}$$

可以推得

$$w'(z)\overline{w(z)}\frac{dz}{ds}+w(z)\overline{w'(z)}\frac{d\bar{z}}{ds}=0.$$

即得

$$\frac{w'(z)}{w(z)}\frac{dz}{ds}=-\frac{\overline{w'(z)}}{\overline{w(z)}}\frac{d\bar{z}}{ds}. \tag{7}$$

用 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 得 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\sqrt{\frac{ab}{cd}}$, 得出

$$\frac{w'(z)}{w(z)}\frac{dz}{ds}=i\frac{|w'(z)|}{|w(s)|}\left|\frac{dz}{ds}\right|=i|w'(z)|. \tag{8}$$

因此得出

$$-\frac{\partial}{\partial n}\log|w(z)|=|w'(z)|.$$

代入 (2) 式得公式

$$U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C U(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|w(\zeta)|}ds. \tag{9}$$

因此得到

定理 1. 假定D有本节开始时所指出的性质. 在周界C上给与一个仅有有限个第一类不连续点的函数$U(\zeta)$, 则 (9) 所定义的函数在D内解析，在周界上当$U(\zeta)$连续时取值$u(\zeta)$, 当z_0沿各种路线趋向一个不连续点时,可以如同 § 4 中那样处理.

由于$w(z)$把z_0变为 0, 因此,我们把这函数写成为

$$w=f(z, z_0),$$

并命

$$g(z, z_0)=\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|}.$$

定义. 函数$g(z, z_0)$称为区域D的 Green 函数.

由 Poisson 核的性质不难推得

定理 2. 当 $z_0\in D$ 时，这函数在C上处处为 0，在D内除 $z=z_0$ 外处处调和. 当 $z\to z_0$ 时，$g(z, z_0)\to\infty$.

§ 15. 单连通域的 Cauchy 公式

定理 1. 仍然在上节的假定下,如果$f(z)$是一个在D内解析并且在$\bar{D}$上连续的函数，则

$$\int_C f(z)dz=0.$$

证. 命 $z=\tau(w)$ 是 $w=w(z)$ 的逆变换,则

$$\int_C f(z)dz=\int_{|w|=1}f(\tau(w))\tau'(w)dw.$$

由于解析函数的复合函数仍然是解析函数，解析函数的微商仍然是解析函数，因此，

$f(\tau(w))\tau'(u)$ 是 w 的解析函数. 因而得出本定理.

定理 2. 仍如定理 1 的假定, $z_0 \in D$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0).$$

证. 命 $f(\tau(w)) = g(w)$, 则得

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{g(w)\tau'(w)}{\tau(w)-\tau(w_0)}dw, \quad |w_0| < \rho.$$

因为 $\tau = \tau(w)$ 是一一对应的保角变换,所以 $\tau'(w_0) \neq 0$. 命

$$\frac{1}{\tau(w)-\tau(w_0)} - \frac{1}{\tau'(w_0)(w-w_0)} = K(w),$$

则

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{g(w)\tau'(w)}{(w-w_0)\tau'(w_0)}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} g(w)\tau'(w)K(w)dw.$$

右边的第一项等于

$$\frac{g(w_0)\tau'(w_0)}{\tau'(w_0)} = g(w_0).$$

现在只须证明第二项等于 0 即得. 也就是如果能证明 $K(w)$ 是解析函数,即可由定理 1 推出.

由于

$$\tau(w) = \tau(w_0) + (w-w_0)\tau'(w_0) + O(|w-w_0|^2),$$

可以推得当 $w \to w_0$ 时 $K(w)$ 有界,在 $w \neq w_0$ 的各点 $K(w)$ 显然是解析的, 因此得出本定理.

第五章　点集论与拓扑学中的若干预备知识

§1. 收　　敛

讲到收敛就想到"距离"的概念．我们已经遇到过多种"距离"，其最显著的有三种：(i) 普通的距离，即两复数 z_1, z_2 之间的 Euclid 距离 $|z_1 - z_2|$；(ii) 椭圆几何所出现的球面距离，或弦距离，即两点（包括∞在内）z_1, z_2 的弦距离

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}};$$

(iii) 双曲几何中的非欧距离或伪弦距离，即如果 $|z_1| < 1$，$|z_2| < 1$，则 z_1, z_2 二点的伪弦距离

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|}.$$

这些距离统一以一个符号 $d(z_1, z_2)$ 表之．它们都有以下的一些性质：

(i) $d(z_1, z_2) \geqslant 0$，而仅当 $z_1 = z_2$ 时取等号；

(ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$；

(iii) $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

不等式 (iii) 在第一种情况中，当三点在一直线上，且 z_3 在 z_1, z_2 之间时取等号，在椭圆几何及双曲几何中当且仅当 $z_3 = z_1$ 或 z_2 时取等号．

一个贯 $z_1, z_2, \cdots$，如果有以下的性质就称为收敛于 a：

$$\lim_{n\to\infty} d(a, z_n) = 0.$$

特别值得注意的是在椭圆几何中有一点是∞的情况

$$d(\infty, z_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}},$$

在这种情况下，贯 $z_n \to \infty$ 的意义是 $\dfrac{1}{|z_n|} \to 0$．在现在的双曲几何距离表达式中，我们不要忘记 $|z_1| < 1$，$|z_2| < 1$．如果取上半平面作为依据，则伪弦距离是

$$d(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - z_2}\right|, \quad \vartheta z_1 > 0, \quad \vartheta z_2 > 0.$$

注意，除椭圆几何弦距离把无穷远点概括了进去外，我们并没有得出什么新东西来！在椭圆几何中，如果 $|z_1| < R$，$|z_2| < R$，则

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 + R^2} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}} \leqslant |z_1 - z_2|.$$

因此，如果 z_n 依弦距离收敛于 a，则在普通意义下也是收敛于 a 的．并且反之亦真．又如果 $|z_1| < \rho$，$|z_2| < \rho$，$\rho < 1$，则伪弦距离给出

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 - \rho^2} \geqslant \frac{|z - z_2|}{1 - |z_1\bar{z}_2|} \geqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right| \geqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1 + |z_1\bar{z}_2|} \geqslant \frac{|z_1 - z_2|}{2}.$$

即如果一贯依伪弦距离收敛，则一定是普通收敛．并且反之亦真．以上所说的，是所谓"等价拓扑"的例子．

由此可知，用弦距离作为收敛标准最有普遍性，今后用 $d(a, b)$ 表弦距离．不难证明以下的结果．由

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = b$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} z_n w_n = ab.$$

但 $a + b$ 及 ab 必须是有意义的（例如：不允许 $0 \cdot \infty$，$\infty + \infty$ 等）．（因为前面已知 $a \neq \infty$，$b \neq \infty$ 时的情况，因此读者仅需自证 (i) $a = \infty$，$b \neq \infty$ 时，"和"式成立；(ii) $a = \infty$，$b \neq 0$ 时，"积"式成立．）

§2. 紧致点集

已知：在任何一个有界无穷点集中可以找到一个趋限的贯（Weierstrass 定理）．如果每个这样的极限都包含在点集之中，则有这样性质的点集称为紧致集合．我们在复数以外添上∞及运用弦距离的目的就是使所有的复数所成的集合成为紧致的集合．也就是在以弦距离为依据的情况下，把复平面上所有的点扩充成一紧致集合．即任一无穷点集，一定有一个收敛贯．

说得更细致些，命M是一个复数点集，其中有∞或无有∞．如果M是一无穷集合，则可能有两种情况出现：(i) 对任一自然数 n，M 中有在圆 $|z| = n$ 之外的点，(ii) 存在 n 使M的点都在 $|z| \leqslant n$ 之中．前者M包有一趋于∞的贯，后者由 Weierstrass 定理可知其中有一收敛贯．

由此引出以下的推论．命 $\{z_n\}$ 表一无穷贯，其中一定有一收敛的子贯 $\{z'_n\}$ 收敛于一数 a．如果原来的贯并不收敛，则存在一 $\varepsilon_0 > 0$ 及无穷多个指标 h_n 使

$$d(z_{h_n}, a) > \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

在无穷集合 $\{z_{h_n}\}$ 中，又可以找到 $z''_n \to b$．此 $b \neq a$．

因此得出定理：一个复数无穷贯收敛的必要且充分条件是它的所有的无穷子贯都趋于同一极限．

由此定理甚易推出 Cauchy 判别条件，在某些应用中，这一形式更为方便．

§3. Cantor-Hilbert 对角线法

在不少问题中我们必须从若干个甚至无穷个贯同时取出收敛贯来．即

$$\left.\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}, & \cdots \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\} \tag{1}$$

是无穷个贯．我们的要求是在其中选取无穷个列，排成与(1)相仿的表，其中每一行都成

为收敛贯.

先在第一行中选取收敛贯

$$a_{1j_{11}},\ a_{1j_{12}},\ \cdots,\ a_{1j_{1n}},\ \cdots.$$

其极限是 a_1. 第一个坐标 j_{11} 将以 k_1 表之. 考虑

$$a_{2j_{11}},\ \cdots,\ a_{2j_{1n}},\ \cdots.$$

在其中选一收敛贯

$$a_{2j_{22}},\ a_{2j_{23}},\ \cdots,\ a_{2j_{2n}},\ \cdots.$$

其极限是 a_2. 再以 k_2 代 j_{22}.

继续进行,对每一 $i=1, 2, \cdots$,

$$a_{ij_{ii}},\ a_{ij_{ii+1}},\ \cdots \tag{2}$$

的极限是 a_i. 每一次以 k_i 代 j_{ii}.

现在考虑

$$\begin{array}{l} a_{1k_1},\ a_{1k_2},\ \cdots,\ a_{1k_n},\ \cdots \\ a_{2k_1},\ a_{2k_2},\ \cdots,\ a_{2k_n},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ik_1},\ a_{ik_2},\ \cdots,\ a_{ik_n},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

这是从(1)中取第 k_1 列,第 k_2 列,…而得的. 其中第 i 行所代表的贯与(2)的一子贯仅有有限项不同,所以它的极限是 a_i.

这一选择法称 Cantor 的对角线法.

§4. 点集的类别

命 A 表一批复数所成的集合. 如果 A 中有不同于 z_0 的点 z_n,它们成一以 z_0 为极限的贯,则 z_0 称为 A 的极限点或聚点. 如果有一正数 ε,使适合于

$$d(z, z_0) < \varepsilon$$

的所有的 z 都在 A 中,则 z_0 称为内点(注意 z_0 可以是∞).

不属于集合 A 的点所成的集合 $C(A)$ 称为集合 A 的补集合. 补集合的内点称为 A 的外点. 内点和外点以外的点称为 A 的边界点(注意∞不作为例外). 所有属于 A 的边界点成一集合,称为 A 的边界. 属于 $C(A)$ 的称为 $C(A)$ 的边界.

A 中非聚点之点称为 A 的弧立点.

仅有内点的集合称为开集. 包有所有聚点的集合称为闭集. 无一点非聚点的集合称为密集集合. 闭又密集的集合称为完全集合.

开集的补集是闭集,而且反之亦然. 既开又闭的集合只有扩大复平面本身而无其他. 因为它既包有所有的聚点,又是仅由内点组成的.

命 H_A 表集合 A 所有的聚点所成的集合. $A+H_A$ 称为 A 的闭包,以 $\bar{A}$ 表之. $\bar{A}$ 是最小的包有 A 的闭集. $C(\overline{C(A)})$,即 A 集的补集 $C(A)$ 的闭包 $\overline{C(A)}$ 的补集是 A 所包有的最大的开集. 这称为 A 的开核.

易证有限个或可数个开集的综合是一开集. 一个包有一个的可数个非空的闭集

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$
的交是一非空的闭集．证明如下．在每一集 A_i 中选一点 z_i，从中选一收敛贯
$$z_{n_1}, z_{n_2}, \cdots, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$
趋于 ω．任给一自然数 m，我们可以取得 j 充分大，使 $n_j > m$，这时贯
$$z_{n_j}, z_{n_{j+1}}, \cdots$$
都在 A_m 中(因为 A_ν 是一个包一个的)．由于 A_m 是闭的，所以 ω 在 A_m 中．这对 $m=1, 2, 3, \cdots$ 都对，故 ω 必然在所有的 A_ν 之交 D 内，故 D 是非空的．由于 D 的聚点仍在 D 中，所以 D 是闭集合．

§5. 映照或变形

对应于 z 平面上一个点集 A_z 中的一点，在 w 平面上有一点．这种关系称为单值映照．把 z 平面上的点集 A_z 变为 w 平面上的点集 A_w．写下来就是一个单值函数关系
$$w = F(z), \quad 或 \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$
z 称为 w 的原象，w 称为映象．这函数的定义区域就是 A_z，取值区域就是 A_w．虽然对一个原象 z 我们有一个确定的映象 w，但是我们并没有排斥对一个固定的映象 w 可以有不止一个原象 z 与之对应，可能有很多个甚至于无穷多个．最极端的情况是：A_z 的所有的点都对应于 w 平面上的一点 w_0．这样的函数是常数 $F(z) = w_0$．

命 z_0 是 A_z 的聚点，可能不属于 A_z．A_z 中有一贯 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0．由等式
$$w_n = F(z_n), \quad n = 1, 2, \cdots$$
得出一个映象贯 $\{w_n\}$．但可能 $\{w_n\}$ 并不收敛．我们现在假定对 A_z 中任意收敛于 z_0 的贯 $\{z_n\}$，其映象 $\{w_n\}$ 均为收敛贯的情况．我们说，所有的这样的贯 $\{w_n\}$ 一定收敛于唯一的数 w_0．其理由是如果 $\{z_n'\}$，$\{z_n''\}$ 收敛于 z_0，而其对应的 $\{w_n'\}$，$\{w_n''\}$ 却收敛于 w_0'，w_0''．作贯
$$z_1', z_1'', z_2', z_2'', \cdots.$$
它也是一个收敛于 z_0 的贯．但其映象
$$w_1', w_1'', w_2', w_2'', \cdots$$
既以 w_0' 为聚点，又以 w_0'' 为聚点．因此唯一可能是 $w_0' = w_0''$．

假定 z_0 也在 A_z 中，我们一定有
$$w_0 = F(z_0).$$
因为贯 $z_1 = z_0$，$z_2 = z_0$，$\cdots$ 就给出这个要求．在此情况下我们说函数 $F(z)$ 在 z_0 点连续．甚至于当 z_0 不在 A_z 中，如果对任一 A_z 的贯 $\{z_n\} \to z_0$，$\{F(z_n)\}$ 有唯一的极限，则我们也可以定义 $F(z_0)$ 为 $\lim\limits_{n\to\infty} F(z_n)$．在扩充了的定义范围之后，$F(z)$ 在 z_0 是连续的．

注意如果取弦距离，以上的连续定义并不排斥 z_0，w_0 是 ∞ 的情况．

§6. 一致连续

假定 A_z 中某一闭集合 B 的每一点 ζ 都是 A_z 的聚点．并设 $F(z)$ 在所有的 $\zeta(\in B)$ 处

都连续. 给与δ,研究适合于

$$z \in A_z, \ \zeta \in B, \ d(z, \zeta) < \delta \tag{1}$$

的所有的复数对z,ζ. 并定出这些复数对所给出的

$$\varepsilon(\delta) = \sup d(F(z), F(\zeta)). \tag{2}$$

首先,当δ变小的时候,适合于(1)的z,ζ少了,因而$\varepsilon(\delta)$变小了. 即$\varepsilon(\delta)$随δ减小而单调变小,因此

$$\lim_{\delta \to 0} (\delta) = \varepsilon_0 \tag{3}$$

是存在的. 现在定出ε_0. 我们选取一个贯δ_n适合于

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0. \tag{4}$$

并对每一δ_n,有一对点z_n,ζ_n使

$$z_n \in A_z, \ \zeta_n \in B, \ d(z_n, \zeta_n) < \delta_n, \tag{5}$$

而

$$d(F(z_n), F(\zeta_n)) \geqslant \frac{\varepsilon(\delta_n)}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

我们不妨假定ζ_n收敛于ζ_0(不然取一子贯). 由于B是闭集,因此$\zeta_0 \in B$,它是一连续点. 由(4),(5),

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} \zeta_n = \zeta_0.$$

今得出

$$\lim_{n \to \infty} F(z_n) = \lim_{n \to \infty} F(\zeta_n) = F(\zeta_0).$$

即

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leqslant \lim_{n \to \infty} d(F(z_n), \quad F(\zeta_n)) = 0.$$

这证明了

$$\varepsilon_0 = \lim_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0.$$

也就是给了一个任意小的$\varepsilon > 0$,我们可以找到δ,使适合于

$$d(z, \zeta) < \delta$$

的$z(\in A_z)$,$\zeta(\in B)$常使

$$d(F(z), F(\zeta)) < \varepsilon.$$

这种ε只依赖于δ而跟(z, ζ)无关的性质称为$F(z)$在B上的一致连续性.

如果A_z本身就是一闭集合,而$F(z)$在其上连续,则得以下的定理: 在一闭集合上定义而且连续的函数一定是一致连续的函数.

命A是复平面上的一个点集,ζ是其边界点,则有A的一点列$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$趋于$\zeta$,并且

$$\lim_{n \to \infty} F(z_n) = \alpha$$

存在. 这α称为在边界点ζ函数$F(z)$的边值. 命W表所有的边值的集合,则W是一闭集合.

其证明是不难的.因为如果α_0是W的聚点,即$\{\alpha_n\}$是一组边界值,而$d(\alpha_n, \alpha_0) < \dfrac{1}{n}$,

则至少有一点 z_n 使 $d(F(z_n), \alpha_n) < \frac{1}{n}$. 即 $d(F(z_n), \alpha_0) < \frac{2}{n}$. 故$\alpha_0$是一边界值.

§7. 拓 扑 映 照

一个函数

$$w = F(z) \tag{1}$$

定义一个映照,把 A_z 映照到 A_w 上. 如果再加上限制,由

$$F(z_1) = F(z_2), \quad z_1 \in A_z, \quad z_2 \in A_z,$$

可推出 $z_1 = z_2$, 即对应于一个 $w(\in A_w)$ 我们也只有一个 $z \in A_z$. 这样的映照称为单叶的,也就是一一对应的. 既然如此,则由 w 到 z 也是一个函数关系

$$z = G(w), \tag{2}$$

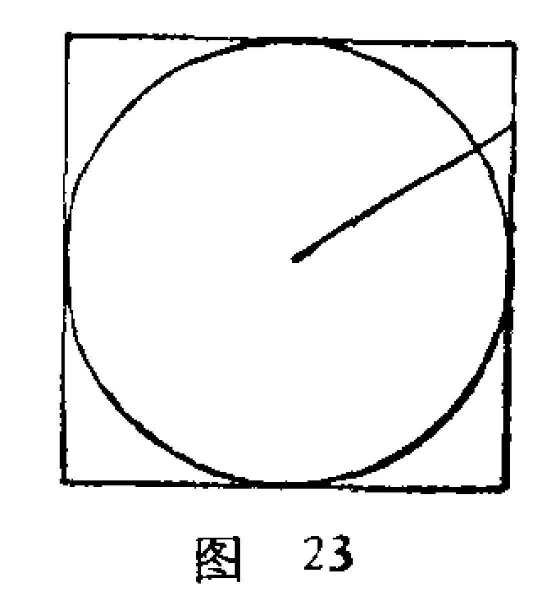
它把 A_w 映照到 A_z 上来,称为 (1) 的逆映照. 如果 F 与 G 都是连续的,则 (1) 称为拓扑映照. 所以拓扑映照是一一对应的双方连续的映照.

如果 $z = H(s)$ 是一拓扑映照把 A_s 变为 A_z, 则

$$w = G(H(s))$$

也是一个把 A_s 变为 A_w 的拓扑映照.

拓扑学就是研究拓扑映照下的几何性质的. 在拓扑学上圆的可以说成是方的. 因为我们有拓扑映象把圆变方. 例如由圆心对每一幅角作一射线交圆周的距离是 $\rho(\theta)$, 交"方周"的距离是 $\tau(\theta)$, 则变形


图 23

$$\theta_1 = \theta, \quad \rho_1 = \frac{\tau(\theta)}{\rho(\theta)}\rho$$

就把 (θ, ρ) 平面上的圆变为 (θ_1, ρ_1) 平面上的方了. 它也可以把平整的说成歪扭的, 如在哈哈镜中看相片, 它也可以把大的说成是小的,把正的说成是反的, 如左右手. 但是它不能把一片说成两片, 把不联的说成联的,把立体的说成为平面的,例如把球说成是圆.

以往所讲的 Möbius 变换都是把 Neumann 球变为自己的拓扑变换.

注意,拓扑依赖于极限. 这样定义极限有一种拓扑. 但换了极限的定义,可能拓扑也将有所不同. 以上所定义极限是用"距离", 有了某一距离就有某一拓扑. 但有时两种不同定义极限的方法可能导致出同一拓扑. 例如, 两个距离 $d(w, z)$, $d_1(w, z)$ 适合于以下的关系: 有正数 ρ 及 ρ_1 存在,使

$$\rho_1 d_1(w, z) < d(w, z) < \rho d_1(w_1 z_1).$$

这样由 $d(w, z)$ 定义出的拓扑与由 $d_1(w, z)$ 定义出的拓扑都是相同的. 例如, 单位圆内诸点所成的集合依普通距离、弦距离、伪弦距离所定义出的拓扑都是等价的. 也就是在一种意义下 $z_n \to z_0$, 在另一种意义下也是如此.

§8. 曲 线

闭线段 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的连续映象称为复平面 (或球面) 上的一连续弧段(或曲线). 因

此一连续曲线可以表为

$$z = x + iy,\ x = f(t),\ y = g(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

这儿 f, g 是 t 的连续函数．这儿"连续"的意义也可以在"弦距离"的意义下理解，即给一 $\varepsilon > 0$，有 δ 存在，使 $d(s, t) < \delta$ 时，$d(z(s), z(t)) < \varepsilon$．如果 $f(0) = f(1)$，$g(0) = g(1)$，则连续弧称为是闭的．

这样定义的曲线似乎很能符合我们的几何直观．但是 Peano 举出例子，说明可以找出适合这条件的曲线，它可以填满一个正方形．因此，虽然几何直观是而且也将永远是数学的一个重要的思想来源，但有了直观还需精密地分析和论证，这样才能置之于坚实的基础上．

Jordan 首先指出无重点的曲线的重要性．

定义． 由 (1) 定义的曲线如果还适合以下的条件，则称为 Jordan 弧段．由

$$f(t) = f(t'),\ g(t) = g(t'),\ 0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant 1 \tag{2}$$

一定得出 $t = t'$．不与自己相交的曲线是 Jordan 弧．Jordan 弧段也称简单曲线．

如果由 (2) 推出 $t = 0$，$t' = 1$，则所定义的点集称为 Jordan 闭曲线．多边形是 Jordan 闭曲线．Jordan 闭曲线也称简单闭曲线．

因此，Jordan 弧段可以理解为单位线段的拓扑映象．而 Jordan 闭曲线可以理解为单位圆圆周的拓扑映象．

利用 Heine-Borel 定理可以证明：

命 C 是域 S 中的一个 Jordan 弧．给与任一 $\varepsilon > 0$，一定有一折线与 Jordan 弧的弦距离 $< \varepsilon$．(即对折线上的任一点，C 上有一点与它的弦距离 $< \varepsilon$．而且对 C 上任一点，折线上也有如此的点．) 即任一 Jordan 弧可以用折线来无限逼近它，任一 Jordan 闭曲线可以用多边形来无限逼近它．

§9. 连 通 性

最简单的拓扑性质之一是连通性．

一点集 S 上的二点 a 与 b 称为在 S 内连通的，如果有一条曲线 C 完全在 S 内，使 a，b 都在 C 上．

如果集合 S 中所有的点都和 S 的某固定点在 S 内连通，则集合 S 称为连通集合．

也可用 Jordan 曲线来定义连通．令 C：

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t)$$

是连通集 S 中连结 a，b 两点的曲线．

如果它不是 Jordan 曲线，则有

$$0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1,$$

使

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2),$$
$$\psi(t_1) = \psi(t_2).$$

因此只需把弧段 $t_1 < t \leqslant t_2$ 所对应的曲线部分抹掉即可．

连通的开集称为域．

连通的闭集称为连续统.

一维的域的最简单的例子是开线段 $0 < t < 1$. 连续统最简单的例子是闭线段 $0 \leqslant t \leqslant 1$. 但在复变数中讨论的域一般都是指二维的.

圆的内部 $|z-a|<r$ 是域, 外部 $|z-a|>r$ 也是域. 同样如果用弦距离, $d(z, a)<\varepsilon \leqslant 1$, 也可在 Nemmanm 球上定义一域.

如果 S 是一域,则连通性可用折线来定义.方法如下:设 C 是 S 中连结 a, b 的曲线,其上的点都是 S 的内点. 在每一点可以作一完全属于 S 的开圆,这些开圆把曲线完全盖上. 由于曲线是一个闭集合,因此有有限个圆 $C_1, \cdots, C_n$ 盖上此曲线. 在这些圆内取连续的折线段,即得所证. (例如可设相邻的圆各含有对方的圆心,则取连结各圆心的折线段即可.)

包含一点的连通开集称为该点的邻域.

我们将不证: 任一拓扑变换一定把原象点的邻域变为映象点的邻域. 这一性质在复变函数论的具体问题中大都是可以直接验证的.

如果 S 是一域, z_0 非其内点,但却是 S 的内点的聚点,则 z_0 称为 S 的边界点. S 的全体边界点的集合称为 S 的边界.

Jordan 闭曲线的最重要的性质是

定理 (Jordan). 一条 Jordan 闭曲线把平面分为两个域,而以 Jordan 曲线为其公共边界.

这定理是直观的,但证明是烦难的. 我们将不加证明. 但在下节将证明几个特例.

下面这条定理也是用得到的.

定理. 命 P 是 Jordan 闭曲线上的点. Q 非曲线上的点. QP 与 x 轴的交角用 $\alpha(P)$ 表之. 如果 Q 是内点, 则当 P 沿这曲线走一圈时, $\alpha(P)$ 或增或减 2π (如果增加 2π, 则 P 的走向是反时针方向的). 如果 Q 是外点, 则 $\alpha(P)$ 并不增减. 与 Jordan 定理一样, 这条定理的证明是并不容易的, 本书也将不加证明.

§ 10. Jordan 定理的特例

1) 凸域. 具有以下性质的开集称为凸域: 如果 A, B 是凸域的两点, 则联结 A, B 的直线段全部在此域中.

在第一卷中已经证明过,凸域的边界是连续的. 凸域加上其边界点得一连续统,它也是有凸性质的.

凸域是域, 此为显然. 凸域的外点所成的集也是开集. 再证其连通性. 今 O 是凸域一内点, P 是一外点, 过 OP 作一半直线. 这半直线分为两段. 自 O 到边界为一段, 包 O 在内. 另一段自边界经过 P 趋于无穷. 在趋于无穷的一段上, P 与 ∞ 之间必无该凸域的内点及边界点, 否则如果有一个这样的点 R, 则 OR 上的点 (包括 P 在内) 必定是内点或边界点. 这是不可能的. 因此任何一个外点一定与 ∞ 是连通的, 即得外点所成的集合是一域.

2) 三角形. 三角形是凸域. 因此整个平面被三角形分为两个域, 而三边为其公共边界. 并易见, 若一线段只交三角形的一边, 一定有一个端点落在三角形中, 另一个落在三

角形外．由凸性，如果两端都在内，这线段一定与三角形无交点．如果两点 P，Q 都在外，且 P，Q 的联线过三角形的一内点 R，则线段 $\overline{PR}$ 与 $\overline{RQ}$ 将各交三角形之边于一点，而且这两点不在同一边上．

3）多边形．一个简单封闭多边形分平面为两个域，以这多边形的边为其公共边界．（"简单"指无重点的意思．）

在多边形 P 的边数上行归纳法．三边形已知其正确．今假定此断言对边少于 n 的多边形为真，因而证明它对 n 边形 P 也真．

不交多边形的边的两顶点的连线称为对角线．今证明存在有以下性质的对角线，它将 P 分为两个多边形，以此对角线为一公共边，而且两个新多边形的边数都少于 n．

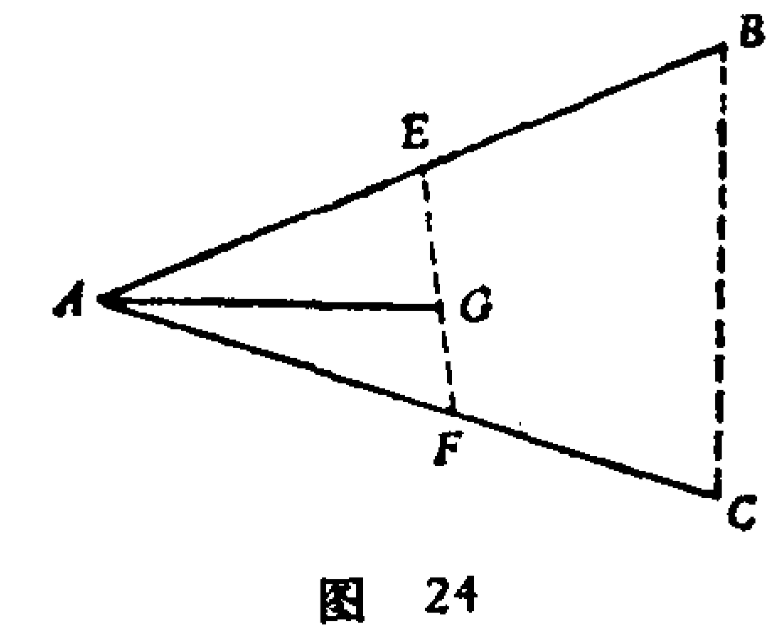


图 24

命 $\overline{AB}$ 与 $\overline{AC}$ 是二邻边．作 $\overline{BC}$．如果三角形内及 $\overline{BC}$ 上无 P 的其它顶点，则 $\overline{BC}$ 就是所求的对角线．不然命 G 是三角形 ABC 内及 $\overline{BC}$ 上离 $\overline{BC}$ 最远的顶点，如同时有 n 个，则任择其一联线 $\overline{AG}$，这就是适合于要求的对角线．由于证法相同我们只就后一种情况进行讨论．

把多边形的顶点顺序排列起来，从 A 出发到 G 之后有两途可循，并且都可以回到 A 点．如此得二多边形 P_1，P_2．它们的边数各为 r 与 s（$r>2$，$s>2$）．AG 是公共边，因此 $(r-1)+(s-1)=n$．故得 $r<n$，$s<n$．

由归纳法假设这两个多边形都有"内"，"外"（外指包有∞）．我们首先证只有两种可能，一种是 P_1 在 P_2 之内（或 P_2 在 P_1 之内），另一种是两域各外．

如断言非真，则 P_1 及 P_2 有公共内点，且 P_1 的内点不完全包括 P_2 的内点，P_2 的内点也不完全包括 P_1 的内点．这就是说，在 P_1 之内有 P_2 的内点及外点，在 P_1 之外也有 P_2 的内点及外点．因此，在 P_1 之内、外都有 P_2 的边界点．设 x，y 是 P_2 的边界点，其中 x 是 P_1 的内点，y 是 P_1 的外点．P_2 之边界的一部分 π 构成联结 x 及 y 的 Jordan 曲线．它一定和 P_1 的边界相交．前面已证 P_1，P_2 只以 $\overline{AG}$ 为公共边界．因此 π 必交 P_1 于 $\overline{AG}$，而不交 P_1 的任何其它边界点．但这样一来，P_2 的边界在 $\overline{AG}$ 上至少有一点成为三分叉，与简单多边形之边界的 Jordan 闭曲线性质相矛盾．故得证．

在第一种情况下，P_2 的内点除去 P_1 的内点及 P_1 的边界在 P_2 内的部分定义为原来多边形 P 的内点；P_2 的外点，P_1 的内点及线段 $\overline{AG}$（除去 A，G 两点）定义为 P 的外点．在第二种情况下，P_1 的内点，P_2 的内点，加上 $\overline{AG}$（除去 A，G 两点）定义为 P 的内点；P_1，P_2 的公共外点定义为 P 的外点．我们只证第一种情况，读者试自证第二种情况．

先证 P 的内点及外点都是开集．如果以 I 表前者，II 表后者，Z 表紧致复平面所成点集，则 $\mathrm{I}=Z-$（P_2 的外点及边界点 $+P_1$ 的内点及边界点）．括号内是两个闭集之和，仍为闭集，故 I 是紧致复平面上某一闭集之补集，应为开集．$\mathrm{II}=Z-$（P_2 的内点及边界点 $\cap P_1$ 的内点及边界点）．括号内是两个闭集之交，仍为闭集，故是紧致复平面上某一闭集之补集，应为开集．

现证 P 的内点及外点都是连通的．它的外点连通是显然的，因为 $\overline{AG}$ 是 P_1，P_2 的公共边界，P_2 的外点及 P_1 的内点都可有曲线与 $\overline{AG}$ 相联．它内点的连通性可证之如下：令 x，

y 为 P 的两个内点,则必为 P_1 的外点. 有一条曲线 π 完全在 P_1 之外, π 的两端为 x, y. 如果 π 不交 P 的边界, 则定理已证. 如果 π 交 P 的边界, 则一定是交 P_2 的边界. 无妨假定它至少有两个交点. 设 x_1 是第一个交点, y_1 是最后一个交点. 以 $d(E, S)$ 表 P_1 及 P_2 的任一顶点 E 到任一非邻边 S 的距离,而令 $\rho = \min d(E, S)$ 为其极小值. 在 P_2 的内部沿 P_2 的边界作距离为 $\eta = \frac{\rho}{k}$ 的平行线段 (k 充分大), 它们也构成一简单封闭多边形 P_3. 由于 x, y 都是 P_2 的内点, 无妨假设它们离边界的距离大于 η (否则可把 η 取得更小), 因此 π 在交 P_2 的边界之前,必先交 P_3 的边界于 x_2, y_2. 取 k 充分大, 可使 x_2 充分接近 x_1, y_2 充分接近 y_1. 由于 P_2 及 P_1 只有一条公共边 $\overline{AG}$, 故 x_2 沿 P_3 的边界到 y_2 有两条路可走. 其中有一条不需经过 $\overline{AG}$ 的 "旁边", 亦即不需穿过 P_1, 从 x 经 x_2 及 y_2 到 y 完全在 P_2 之内,且不交 P_1 及其边界,故亦完全在 P 之内. 定理证明.

§11. 连 通 数

本节将根据定理进行一些直观的讨论,而不加以严格的证明.

Jordan 定理还有以下的推广: 命 G 表一域, γ 是 G 内的 Jordan 闭曲线. γ 把平面分为两部分 D', D''. D' 与 G 的交命之为 G', D'' 与 G 的交命之为 G''. γ 分 G 为两部分 G' 与 G'', 他们是域,而且以 γ 为公共边界.

命 $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ 是两条不相交 Jordan 的闭曲线. 已知 $\gamma^{(1)}$ 分平面为两部分 $G^{(1)}$ 及 $G^{(1)'}$. $\gamma^{(2)}$ 一定在此二域之一内. 因而又分为二. 因此两个不相交的 Jordan 闭曲线分平面为三部分, 都是域. 用归纳法不难证明, n 个互不相交的 Jordan 闭曲线分平面为 $n+1$ 个域.

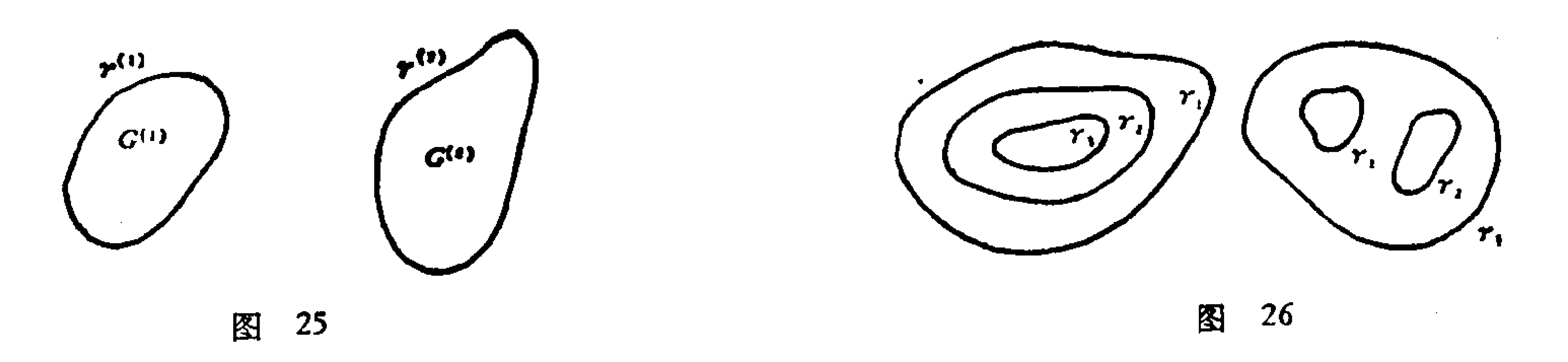


图 25　　图 26

但值得注意,当 $n \geqslant 3$ 时, 有多种拓扑不等价的位置. 例如图 26.

在函数论的研究中"完全隔离"的位置十分重要.所谓 n 个完全隔离的 Jordan 闭曲线乃指任取其一, 其他的 $n-1$ 个都在此一的同一边. 图 26 之二是完全隔离,图 26 之一则否. 这一定义也可以叙述为: 这 n 条闭曲线 $\gamma^{(v)}(v = 1, 2 \cdots n)$ 分平面为 $n+1$ 份. 其一以这 n 个 $\gamma^{(v)}$ 为边界,其他的都是以一个 $\gamma^{(v)}$ 为边界.

现在考虑一域 G 内有三个完全隔离的 Jordan 闭曲线 $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ 的情况. 在 G 内可以找到一条曲线联上 $\gamma^{(2)}$ 与 $\gamma^{(3)}$, 而不交 $\gamma^{(1)}$. 三 Jordan 闭曲线完全隔离的条件(必要且充分)是在 G 中能联其任二不交他一.

在函数论中主要仅考虑有有限个连续统为边界的域. 由一个连续统为边界的域称为单连通,由两个无公共点的连续统为边界的域称为双连通. 一般地讲,由 n 个无公共点的连续统为边界的域称为 n 连通(如图 27).

n 称为连通数，是一个拓扑不变量.

如果域的周界是一 Jordan 闭曲线，则是一单连通域．例如，开圆 $|z| < 1$ 是单连通域，上半平面数 $\vartheta_z > 0$ 亦然．但单位圆沿半径切开仍然是单连通，其周界则非 Jordan 闭曲线了！多种切法(如图 28)可使边界极为复杂，但是它还是单连通域.

但我们将来会知道任二单连通域（多于一个边界点的）可以拓扑地把其一变为另一（甚至于，可以保角地如此做)．因此，以上的复杂的边界情况，反而不是本质现象．也就是说，它不是一个域(内部)的拓扑映照的不变性质.

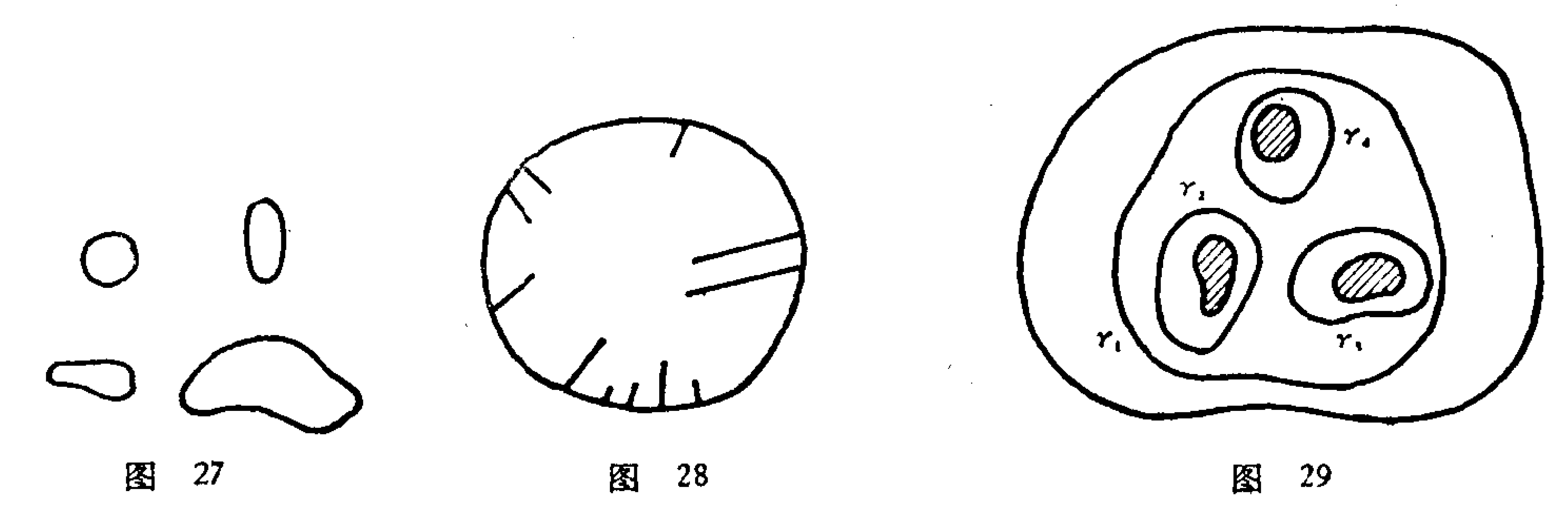


图 27　　图 28　　图 29

如果 G 是一单连通域，γ 是完全在其中的 Jordan 闭曲线，则 γ 分平面为两"边"，有一"边"的点全在 G 中．如果不然，G 的边界的点将一部分在 γ 内，一部分在外，而不是一个连续统了．反之如果不是单连通，其边界由若干个连续统组成，可以证明(例如利用保角变换)有一 Jordan 曲线 γ 全在 G 内并把 G 的边界点分在两边．这事实引出单连通的另一定义：如果 G 内任一 Jordan 曲线的一"边"全在 G 内，则 G 定义为单连通.

多连通域 G 的连通数 n 也可以定义为 G 内所能做的完全隔离的 Jordan 闭曲线的最多条数．这些 Jordan 曲线具有以下的性质：有一域只以这 n 条曲线为边界.

n 的意义还可以用以下的定义来说明．命 G 表一域．一条连一内点一边界点的 Jordan 弧（弧上其他的点全是 G 的内点）称为 G 的一切口．由边界点到边界点的 Jordan 弧(弧上其他的点全是 G 的内点)称为横跨切口．一单连通域被横跨切口分为两个单连通域.

如果 G 上能做 N 条横跨切口而仍是连通的，但任何 $N+1$ 条横跨切口把 G 分为不连通的部分，则连通数 $n = N + 1$.

第六章　解析函数

§1. 解析函数的定义

命D是一个域．$f(z)$ 是在D上定义的单值连续函数．如果它满足下列三种(相互等价的)条件之一，则称为解析的．

(I) (Cauchy-Goursat)．

命 z_0 是D的内点，常有一数 l，使给了任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$\left|l-\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon, \tag{1}$$

则 $f(z)$ 称为在 $z=z_0$ 可导．这就是第三章 §4 的定义．如果D的任一内点都有此性质，则 $f(z)$ 称为在D内解析，这个 l 就定义为 $f(z)$ 在 z_0 的微商，用 $f'(z_0)$ 表之．

(II) (Riemann)．

如果把 $f(z)$ 写成为

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

若 z_0 有一邻域，其中 u，v 是有一阶连续偏微商的实函数，而且适合 Cauchy-Reimann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

则 $f(z)$ 在 z_0 是解析的．

(III) (Weierstrass)．

如果 z_0 有一邻域存在，在其中 $f(z)$ 可以展开为收敛的幂级数，则 $f(z)$ 在 z_0 总是解析的．这时有 $\delta>0$，使

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

在 $|z-z_0|<\delta$ 中是收敛的．

由第三章 §4 已经知道，定义 (II) 与 (III) 可以推出 (I)，因此现在的问题在于由 (I) 推出 (II)，(III) 来．今后说“解析”二字是定义 (I) 的意义．

附记 1：函数

$$f(z)=\sqrt{|xy|}$$

在 x 轴与 y 轴上都等于 0．所以在 $z=0$ 时，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

即适合 Cauchy-Riemann 方程，但在 $z=0$ 时，$f(z)$ 并没有微商，因为

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}.$$

命 $x=\alpha r$, $y=\beta r$, 则当 $r\to 0$ 时,

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{x+yi}\to\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$$

并不是同一的,故原函数并不解析.

这说明了,在一点 Cauchy-Riemann 方程成立并不能得出解析性,因为这仅仅代表两个方向的微商而已. 也就是

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

沿着两个互相垂直的方向趋于同一极限并不足以说明 $f(z)$ 的解析性. 甚至当它沿所有直线方向都趋于同一极限也不一定解析. 例如:

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & \text{当 } z\neq 0,\\ f(z)=0, & \text{当 } z=0. \end{cases}$$

不难证明,当 z 沿任一直线趋于 0, 常有

$$\lim\frac{f(z)-f(0)}{z}=0.$$

但沿 $x=y^2$, 则

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 时不解析.

附记 2. 在 (I) 的定义中,如果假定了 $f'(z)$ 是连续函数,则立即可以推得 (II).

附记 3. 在第一个定义中,原先 Cauchy 假定的 $f'(z)$ 的连续性被 Goursat 证明是不必要的,人们当然希望定义 II 亦有相应的改进. 果然, Looman-Menchoff 证明了如下的更为一般的定理(但本书不予证明).

令 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 是域 D 中最多除了一个可数集合外,处处有一阶偏导数的实函数,且在 D 中最多除了一个测度为 0 的集合外,处处皆有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

则 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 是 D 中的解析函数.

§ 2. 一些几何概念

若 $x(t)$, $y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 表示一条 Jordan 曲线, 为了沿简单曲线 C 求积分的需要,我们不得不添上曲线可度长的条件. 我们假定 $x(t)$, $y(t)$ 都有连续微商, 且 $f(z)$ 是 C 上的连续函数,则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &=\int_a^b f(x(t)+iy(t))(x'(t)+iy'(t))dt\\ &=\int_a^b (ux'-vy')dt+i\int_a^b (uy'+vx')dt.\end{aligned}$$

在第一卷已证明过

$$\left|\int_c f(z)dz\right| \leqslant ML.$$

这儿M是 $f(z)$ 在C上的最大值，而L是C的长度.

一条可度长的简单封闭曲线称为围道. 为了方便起见，我们常从考虑以下形式的闭围道C入手. 假定有一区间(a, b)，当 $a < x' < b$ 时，$x = x'$ 交C于二点(不多不少)，命定为 $y_1(x')$ 与 $y_2(x')$，$y_1(x) < y_2(x)$. 当 $x < a$，及 $x > b$ 时，$x = x'$ 与C无交点. 同样有一区间 (α, β)，当 $\alpha < y' < \beta$ 时，$y = y'$ 交C于二点 $x_1(y')$ 与 $x_2(y')$($x_1(y') < x_2(y')$)，而当 $y' < \alpha$ 及 $y' > \beta$ 时，$y = y'$ 与C无交点. 围道C的内点是适合于 $a < x < b$ 及 $y_1(x) < y < y_2(x)$ 的点. 不在C内和C上的点称为C的外点. 以后所讲的简单闭围道就是指这样的围道.

如果C与 C' 是两个这样的简单闭围道，而有一段或多段的公共弧，并且各在其一之外. 除了公共弧，得一区域 C''. C'' 的内部是由C及 C' 的内部点及公共边界上的点所组成(凡属于C及 C' 的公共外点的聚点不计在内. 参看图 30，例如α, β).

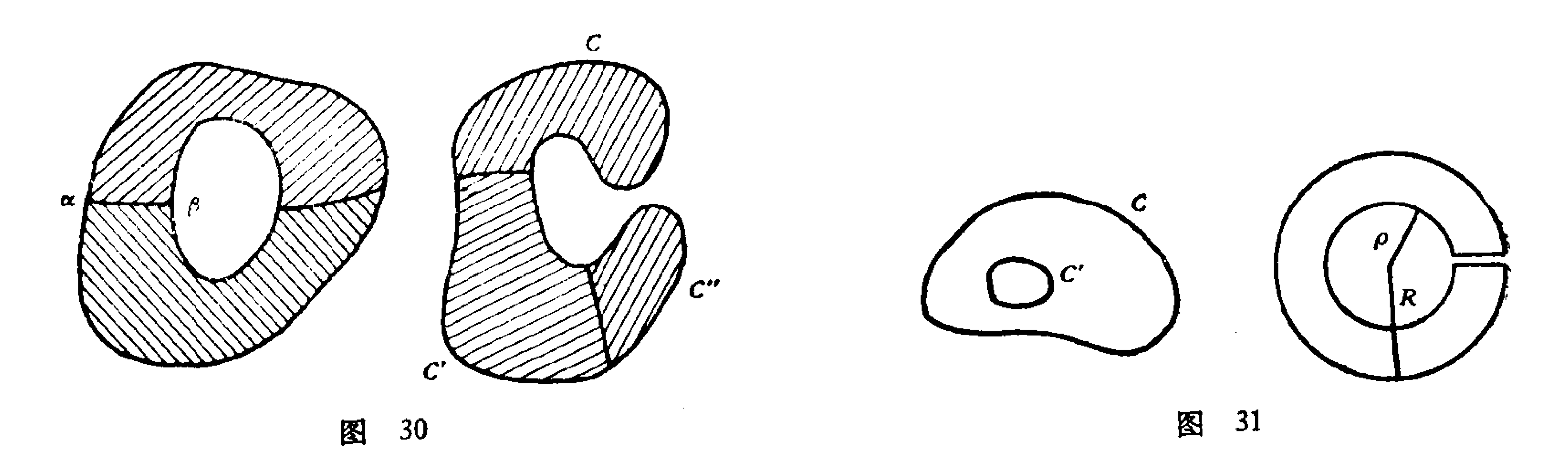


图 30　　　　图 31

又如果 C' 的所有内点也是C的内点，则由C的内点同时又是 C' 的外点的点所成的集合得一新区域. 例如: $\rho \leqslant |z| \leqslant R$. $y \geqslant 0$ 所围的区域，又把此区域对实轴作对称，并擦去从 $-R$ 到 $-\rho$ 一段实轴. 因而得出一区域，其中从 $z = \rho$ 到 $z = R$ 走方向相反的两次.

§ 3. Cauchy 定 理

定理 1 (Cauchy). 命C表一围道. 假定 $f(z)$ 是一个在C上及在C所包含的二维域D上解析的单值的函数(定义 I)，则

$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{1}$$

这儿的积分是沿C进行的.

如果用“定义 II”，这定理是容易证明的. 因为

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx.$$

由 Cauchy-Riemann 方程可知 $udx - vdy$ 与 $udy + vdx$ 都是确切微分. 可得定理. 或用 Green 公式和 Cauchy-Riemann 方程可得定理.

特别地，函数 $az+b$ 有连续微商，由 § 1 附记 2 可知它的实、虚部适合 Cauchy-Riemann

方程．因此

$$\int_C (az+b)dz = 0.$$

Goursat 的贡献就是减弱了假定，也就是不再要求 $f'(z)$ 的连续性．

他先从定义 (I) 推出 $f(z)$ 的一致可微性，也就是：

给了 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $\delta > 0$ (δ 与 z 无关)，使 $|z'-z| < \delta$ 时

$$|f(z') - f(z) - (z'-z)f'(z)| < \varepsilon |z'-z|. \tag{2}$$

这儿 z' 与 z 都在 C 或 C 所围绕的区域 D 上．

以 $\overline{D}$ 表 C 与 D 的点所成的集合．

要证明此点，我们用"不断分割法"．先作一网络，由平行于 x, y 轴，距离为 l 的直线所构成，它把平面分成许多方块．我们取其中与 D 有公共内点的那些方块．其中有的完全在区域 D 内的，记之为 $C_1, \cdots, C_M$．有些与 C 有交点的，这些方块在 $\overline{D}$ 内的部分记之为 $D_1, \cdots, D_N$，如此则

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^{M} C_i + \sum_{j=1}^{N} D_j.$$

在这样分割之后，把 $C_1, \cdots, C_M, D_1, \cdots, D_N$ 分为二类．一类是对其中所有的 z 与 z'，当 $|z-z'| < \delta_1$ 时 ($\delta_1 > 0$ 固定)都有 (2) 式成立．余者一类是(2)式不能成立的．

把第二类的区域平分为四份．取 $\delta_2 = \frac{\delta_1}{2}$，如果仍然有 (2) 式不能成立的部分，即其中存在两点 z, z', $|z-z'| < \delta_2$，使 (2) 式不成立，则再四分，继续施行．如此可能性有二：其一是经过有限次分割后 (2) 式成立了，结论已经获证；不然，有一串一个套一个的小方格

$$R_1, R_2, R_3, \cdots, R_n, \cdots$$

及一趋于 0 的正数串 $\delta_n = \frac{\delta_1}{2^{n-1}}$，使 (2) 不成立．

这些方格趋于一点 z_0'．由假设知，存在 $\delta_0 > 0$，使 $|z - z_0'| < \delta_0$ 时恒有 (2) 式成立．但当 n 充分大时，可使 R_n 完全包含于 $|z - z_0'| < \delta_0$ 内及 $\delta_n < \delta_0$，这是与假设相矛盾的，因此得出 $f(z)$ 的一致可微性．

附注．以上实际上是附带证明了 Heine-Borel 定理，熟悉该定理的读者可直接应用之(参阅第一卷一分册第四章 § 17.)．

现来证明定理 1．利用前面所作的细格，沿每个 $C_1, \cdots, C_M$ 及 $D_1, \cdots, D_N$ 的边界积分．记相应的边界为 $\partial C_1, \cdots, \partial C_M$ 及 $\partial D_1, \cdots, \partial D_N$，则

$$\int_C f(z)dz = \sum_{m=1}^{M} \int_{\partial C_m} f(z)dz + \sum_{n=1}^{N} \int_{\partial D_n} f(z)dz.$$

其中每一积分都是正向的．例如，二正方形 $ABCD$ 与 $DCEF$ 有一公共边 CD．在第一正方形中积分由 D 到 C，在第二正方形中积分由 C 到 D，因此沿 CD 的积分对消了．因此，在以上的积分中实际只有 C 的部分，其他添加的线段的积分都消去了．由 (2) 可知

图 32

$$\int_{\partial C_m} f(z)dz = \int_{\partial C_m} [f(z_0') + (z - z_0')f(z_0')]dz + \int_{\partial C_m} \phi(z)dz.$$

其中 $|\phi(z)| \leqslant \varepsilon |z - z_0'|$. z_0' 是 C_m 中一定点. 函数

$$f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')$$

是 z 的线性函数,故有连续微商. 因此,由本节开始已经证明了

$$\int_{\partial C_m} [f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')]dz = 0,$$

$$\int_{\partial D_k} [f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')]dz = 0.$$

又在 C_m 中 $|z - z_0'| \leqslant \sqrt{2}\, l_m$ (l_m 是小四边形 C_m 的边长),

$$\left|\int_{\partial C_m} \phi(z)dz\right| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}\, l_m \cdot 4l_m,$$

即

$$\left|\int_{\partial C_m} f(z)dz\right| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}\, l_m \cdot 4l_m.$$

又 D_n 的周界长度不超过 $4l_k + S_n$. 这儿 S_n 是 D_n 与 C 的公共部分,所以

$$\left|\int_{\partial D_n} \phi(z)dz\right| < \varepsilon\sqrt{2}\, l_n(4l_n + S_n).$$

对一切的 m, n 求和

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < 4\sqrt{2}\,\varepsilon\left(\sum_m l_m^2 + \sum_n l_n^2\right) + \varepsilon\sqrt{2}\, l \sum_n S_n, \tag{3}$$

这儿

$$\left(\sum_m l_m^2 + \sum_n l_n^2\right) \leqslant (b - a)(\beta - \alpha).$$

而 $\sum_n S_n = C$ 的长度.

因此 (3) 的右边小于 ε 的常数倍,而左边与 ε 无关,因得定理.

附记 1. 凡是可以切开成为若干个简单闭围道所范围的区域的区域, Cauchy 定理也是正确的,沿切开处积分来回抵消. 故得定理.

附记 2. 在 C 上关于 $f(z)$ 的条件可以减弱. 即只需要 $f(z)$ 在 D 内部解析, 在 $\overline{D} = D + C$ 上连续,因为如果 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续,则

$$\int_C f(z)dz = \lim \int_{C'} f(z)dz.$$

这儿 C' 是 C 内的围道,而且 $C' \to C$, 我们不在此具体说明了.

思考性问题: 用单位圆为想象出发点,是否需要 $f(z)$ 在 C 上连续?

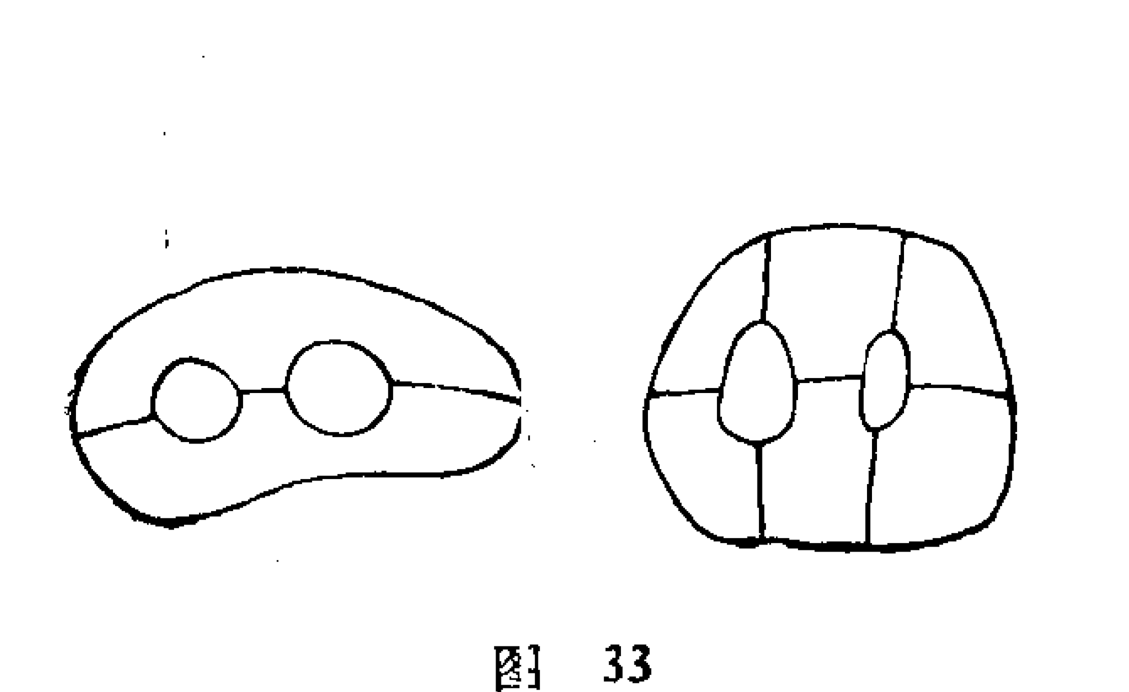


图 33



图 34

定理 2. 在定理 1 的假定下,沿任何 D 内曲线由 z_0 到 z, 函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

是单值的,解析的.

证. 首先,如果 D 内有两条曲线由 z_0 到 z, 此二曲线合成一闭围道,因而得出 $F(z)$ 是单值的. 其次

$$F(z+\delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\delta z} f(w)dw.$$

因此

$$\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)=\frac{1}{\delta z}\int_{z}^{z+\delta z}(f(w)-f(z))dw.$$

由连续性,对任一 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$ 存在,使 $|w-z|<\delta$ 时有

$$|f(w)-f(z)|<\varepsilon.$$

如此则当 $|\delta z|<\delta$ 时

$$\left|\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

即得 $F(z)$ 是解析的,而且其微商等于 $f(z)$.

$F(z)$ 称为 $f(z)$ 的不定积分.

不难证明: 如果 $G'(z)=f(z)$, 则 F 与 G 相差一常数,也不难证明

$$\int_{z_0}^{z} f(w)dw=G(z)-G(z_0).$$

§4. 解析函数的微商

命 $f(z)$ 在一简单闭围道 C 上及其 D 内解析. 命 z 是 C 内的一定点,考虑函数

$$\frac{f(w)}{w-z}$$

舍除 $w=z$ 这一点外,这函数是解析的. 在 $w=z$ 附近取一小圆. 其半径为 ρ, 并取 ρ 充分小,使 $|z-w|=\rho$ 含在 D 内,且

$$|f(w)-f(z)|<\varepsilon,$$

用 r 表此圆之圆周,则

$$\left(\int_C-\int_r\right)\frac{f(w)}{w-z}dw=0,$$

即

$$\int_C\frac{f(w)}{w-z}dw=\int_r\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

而

$$\int_r\frac{f(w)}{w-z}dw=f(z)\int_r\frac{dw}{w-z}+\int_r\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw.$$

我们用极坐标

$$w=z+\rho e^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

直接算出

$$\int_{\Gamma}\frac{dw}{w-z}=\int_{0}^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\theta}d\theta}{\rho e^{i\theta}}=2\pi i,$$

及

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho=2\pi\varepsilon,$$

因此

$$\left|\int_{C}\frac{f(w)}{w-z}dw-2\pi if(z)\right|<2\pi\varepsilon.$$

左方与 ε 无关,因此得公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(w)}{w-z}dw=f(z). \tag{1}$$

这是有名的 Cauchy 积分公式,即由 $f(z)$ 在周界上的值来推出 $f(z)$ 在周界内的函数值.

实质上,只须假定 $f(z)$ 由内趋于 C 时连续也就够了.

再由

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)}dw. \tag{2}$$

(z 在 D 内,取 h 充分小使 $z+h$ 也在 D 内),由

$$\int_{C}\frac{f(w)dw}{(w-z)(w-z-h)}-\int_{C}\frac{f(w)dw}{(w-z)^2}=h\int_{C}\frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}dw. \tag{3}$$

在 C 上 $|f(w)|\leqslant M$. 由 z 到 C 的最短距离是 δ, 命 L 表 C 的长度,则得当 $|h|<\delta$ 时

$$\left|\int_{C}\frac{f(w)dw}{(w-z)^2(w-z-h)}\right|\leqslant\frac{ML}{\delta^2(\delta-|h|)},$$

当 $|h|\to 0$ 时,右边有界,因此,由 (2) 及 (3) 得

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$$

这是 $f'(z)$ 的 Cauchy 公式.

再用同样的方法,从

$$\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{2w-2z-h}{(w-z)^2(w-z-h)^2}f(w)dw$$

而推得

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(w)}{(w-z)^3}dw.$$

即 $f''(z)$ 是存在的. 因而解析函数的特点是假定了"可微性"而可推出高阶可微性. 因此从定义 (I) 可以推出定义 (II) 来.

继续进行, $f(z)$ 有各阶微商,得

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

习题 1. 假定在以 a 为中心以 r 为半径的圆周上及圆内 $f(z)$ 是解析的,则

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{r^n}.$$

这儿 M 是 $|f(z)|$ 在圆周上的最大值.

习题 2. 假定 $f(z)$ 是解析函数,证明当 $f(z) \neq 0$ 时

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log |f(z)| = 0,$$

而且除 $f(z) = 0$ 或 $f'(z) = 0$ 的 z 点外,常有

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} |f(z)| > 0.$$

§5. Taylor 级 数

上节已经证明任何一个解析函数都有各阶微商,现在进一步证明:

假定 $f(z)$ 在一简单闭曲线 C 上及其内部解析,命 a 又是一内点及 δ 是 a 到 C 上最短距离,则当 $|z-a| < \delta$ 时,有收敛级数

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots.$$

还是从 Cauchy 积分公式出发,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

这儿 Γ 是以 a 为中心,以 $\rho(<\delta)$ 为半径的圆,这公式当 $|z-a| < \rho$ 时成立.

由于在 Γ 上

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} + \cdots$$

是一个一致收敛的级数,所以可以乘以 $\frac{f(w)}{2\pi i}$ 而沿迴线 Γ 逐项求积分,如此得出:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-a} dw + \frac{z-a}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \cdots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + \cdots,$$

由于 ρ 可任意接近于 δ, 这就是所需要的公式了.

这说明从定义 (I) 也可以推出定义 (III) 来. 因而定义 (I), (II), (III) 是相互等价的.

与实变数的 Taylor 展式有一个极重要的不同点, 就是在研究实变数函数的 Taylor 展式时, 总是展得 n 项, 然后看其余项是否随 n 趋于 0. 在复变数函数研究时, 其余项趋近于 0 可由解析性自然推得, 级数的收敛圆半径的决定依赖于解析性. 例如 ρ 是最大的正数,使在 $|z-a| < \rho$ 内 $f(z)$ 解析, 则 $f(z)$ 在 $z = a$ 处的 Taylor 展式的收敛半径是 ρ, 例如: 函数

$$\frac{1}{1+z^2} (= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)$$

在 $z = \pm i$ 处不解析. 因此,在原点展式的收敛半径等于 1. 但作为实函数来说, 我们看不出为什么收敛范围应当是 $-1 < x < 1$ 的道理.

附记. 以上的一切讨论都不需要假定 $f(z)$ 在 C 上是解析的，而仅需要 $f(z)$ 在 C 上是连续的.

更深刻些，如果 $f(z)$ 在 C 上是可积函数 $\varphi(w)$，则照样可以定义 Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(w)}{w-z}dw.$$

这在 C 内是一个解析函数，并且有 Taylor 展式.

习题 (Morera) (Cauchy 积分定理之逆定理).

命 D 是一域，在其中 $f(z)$ 是 z 的连续函数，并且过 D 内的任一闭围道

$$\int f(z)dz$$

恒等于 0，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

提示: 考虑

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(w)dw,$$

由

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_z^{z+h}(f(w)-f(z))dw,$$

推得 $F(z)$ 解析，因之，$f(z)$ 解析.

§ 6. Weierstrass 重级数定理

定理 1. 命 C 为一简单闭曲线，D 是 C 的内点所构成的域，$\{f_n(z)\}$ 是一个函数贯，在 $\bar{D}=D+C$ 上解析，并且假定在 C 上

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z) \tag{1}$$

一致收敛，则级数 (1) 在 $\bar{D}$ 上一致收敛，而且其和是 D 内的解析函数.

在 C 上，命

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z),$$

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(z)}{z-w}dz$ 是 D 内的一个解析函数，仍以 $\Phi(w)$ 表之. 命 a 为 D 内的任一点

$$\begin{aligned}\Phi(a)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(z)}{z-a}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\sum_n f_n(z)\right]\frac{dz}{z-a}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(z)}{z-a}dz\right]=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(a),\end{aligned}$$

(由于在 C 上 $\frac{1}{z-a}$ 是有界函数，所以在 C 上 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{z-a}$ 也是一致收敛的. 因此可以逐项积分.) 可见在整个 D 内

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(w)=\Phi(w). \tag{2}$$

现证 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{D}$ 一致收敛．由假设知当 n 充分大时，对任一正整数m，在C上有

$$\left|\sum_{n}^{n+m} f_k(z)\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

由极大模原理知在整个 $\overline{D}$ 上，(3) 亦成立，定理全部证完．

定理 2. 命

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_n(z),\ \cdots$$

是域D内的解析函数贯，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

在D内的任一闭区域 D' 上一致收敛，则

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

在D内是解析的，且可逐项求各级微商．

命C是D内的任一简单闭曲线，我们先证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \tag{4}$$

由

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw,$$

可知

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw.$$

由级数的一致收敛性，乘以 $\dfrac{1}{w-z}$ 及逐项积分可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

即得 (4) 式．

从 (4) 式不难推出 $f(z)$ 有微商 $f'(z)$，而且

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

因此 $f(z)$ 是解析的．

又由一致收敛性可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z),$$

因此级数可以逐项微分，又经微分后的级数仍然在D内的任一闭区域上一致收敛，原因

是：如果 D' 是这样的一个闭域，则可以假定曲线 C 包含 D' 在其内部，命 δ 等于 D' 与 C 的最短距离，则对 D' 中任一点 z

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} f_n'(z)\right| = \left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{N}^{N'} f_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon l}{2\pi\delta^2}.$$

这儿 l 是曲线 C 的长度，ε 是函数

$$\left|\sum_{N}^{N'} f_n(w)\right|$$

在 C 上的最大值，这与 z 无关，而且当 $N, N' \to \infty$ 时趋于 0，故得结论.

再从 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ 出发，证明

$$f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(z)$$

的一致收敛性，续行，得一般的结果.

附记 1. 与实变数不同之点是： 对实变数函数的级数逐项求微分的条件中还要加上微分所得的级数一致收敛.

附记 2. 定理 1 的结论不能改为"在 C 上及 C 内解析"，例子是

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

在 $|z| \leqslant 1$ 上一致收敛，但在 $z=1$ 并非解析，其原因是

$$f'(z) = -\log(1-z)/z.$$

又

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

在 $|z|<1$ 上并不一致收敛.

附记 3. 定理 1 中如果 C 不是封闭的，我们并不能推出逐项求微商的可能性(参考习题 2).

附记 4. 换成贯的形式：如果 $f_n(z)$ 是一在 C 上及 D 内的解析函数贯，并且在 C 上一致收敛，则 $f_n(z)$ 在 C 内一致收敛于一个解析函数 $f(z)$，而且 $f_n^{(\nu)}(z)$ 一致收敛于 $f^{(\nu)}(z)$.

习题 1. 在 $R(s)>1$ 时，级数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

收敛，而且

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}\log^k n.$$

习题 2. 定出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nz}{n^2}$$

表一解析函数的区域. 这函数在实线段上一致收敛，但其微商在 $z=(2m+1)\pi$ 的附近不一致收敛，而二阶微商不收敛.

习题 3. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n^2}$$

在实轴上一致收敛，但在 z 平面上没有一个域在其中这级数一致收敛.

习题 4. 用 Morera 定理推出定理 2 来.

提示：由

$$\int_C f(w)dw=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(w)dw=0$$

推出 $f(z)$ 的解析性来.

习题 5. 仍然有定理 1 或 2 的假定，并设 z_0 是一内点，把 $f_n(z)$ 在 z_0 展开为幂级数

$$f_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}(z-z_0)^m,$$

则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}\right)(z-z_0)^m.$$

（这是重级数定理命名之由来.）

§7. 由积分定义解析函数

定理 1. 命 $f(z, w)$ 表复变数 z, w 的连续函数，其活动范围是 z 在一域 D 之上，w 在一有界光滑曲线 C 上，对 C 的每一点 w，$f(z, w)$ 是 z 在 D 内的解析函数，则

$$F(z)=\int_C f(z, w)dw,$$

在 D 内定义一解析函数，而且

$$F'(z)=\int_C\frac{\partial f}{\partial z}dw,$$

高阶微商也有相仿的结果.

证. 假定 C 是由

$$w=u+iv,\ u=u(t),\ v=v(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

所确定的，$u'(t)$，$v'(t)$ 是连续的.

在 D 内作一围道 Γ，$z=x+yi$，$x=x(s)$，$y=y(s)$，$s_0\leqslant s\leqslant s_1$，$x(s_0)=x(s_1)$，$y(s_0)=y(s_1)$，$x(s)$，$y'(s)$ 连续，则对 Γ 内任一点 ζ，常有

$$f(\zeta, w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z, w)}{z-\zeta}dz,$$

因此

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C dw\int_\Gamma\frac{f(z, w)}{z-\zeta}dz.$$

交换积分号(这是可能的,因为它可以表成实形式

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{s_0}^{s} [\varphi(s, t) + i\psi(s, t)] dt,$$

而 φ, ψ 是连续函数,故可交换积分号),得

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-\zeta}\int_\Gamma f(z, w)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-\zeta}dz.$$

即 $F(z)$ 适合于 Cauchy 积分公式. 由此可证 $F(z)$ 是解析的,而且可以在积分号下求微分.

例 1. 如果 $f(t)$ 在 (a, b) 中是一个连续函数,则在全平面上

$$F(z) = \int_a^b \cos zt f(t)\, dt, \quad G(z) = \int_a^b \sin zt f(t)\, dt$$

是 z 的解析函数.

函数

$$\int_a^b \frac{f(t)}{z-t}\, dt$$

是解析函数,但除去 z 是 (a, b) 间的实数的情况.

习题 1. 试用 Morera 定理证定理 1.

定理 2. 如果曲线 C 趋向无穷,但积分

$$\int_C f(z, w)dw, \quad 及 \quad \int_C \frac{\partial^\nu f(z, w)}{\partial z^\nu}dw, \quad \nu = 1, 2, \cdots$$

一致收敛,则以上的结果仍然正确.

证. 命 C_n 是 C 在圆 $|z| \leqslant n$ 内的部分,则

$$F_n(z) = \int_{C_n} f(z, w)dw,$$

则对任一 n, $F_n(z)$ 是解析函数,又当 $n \to \infty$, $F_n(z)$ 一致趋于 $F(z)$,所以 $F(z)$ 也是解析的,最后

$$F'(z) = \lim_{m\to\infty} F'_n(z) = \lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\partial f}{\partial z}dw = \int_C \frac{\partial f}{\partial z}dw.$$

同法可以处理 D 为无界域的情况,但必须保证收敛的一致性.

例 1. 函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-w} w^{z-1} dw$$

当 $Rz > 0$ 时表一解析函数.

例 2. 在哪些范围内

$$\int_0^\infty e^{-zw^2}dw, \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w^z}dw, \quad \int_0^\infty \frac{\cos w}{w^z}dw$$

表解析函数?

§8. Laurent 级数

定理 1. 令 $f(z)$ 是在一个环形区域上单值的解析函数.这个环的边界是以 a 为中心、

以 R 及 $R'(R'<R)$ 为半径的圆 C 及 C' 所组成的，则 $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的正，负方次的级数，这级数在环形区域内收敛.

证. 令 z 表环内的一点，作积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

这积分先正向绕 C 一周，再沿一半径到内圆 C'，绕 C' 反向一周，而沿半径回到原出发点，由于函数是单值的，经过半径两次的积分消去，因此得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

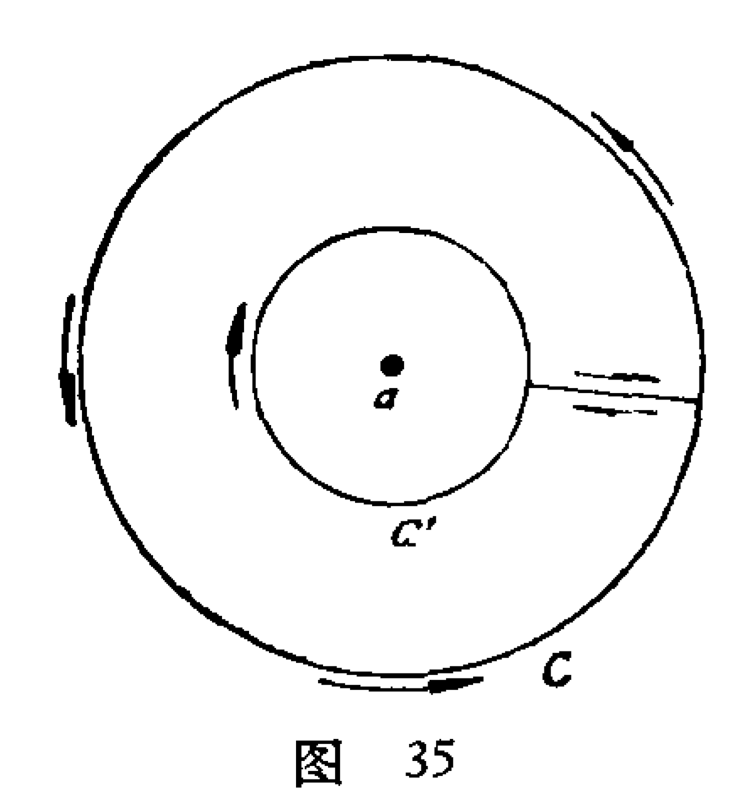


图 35

现在两积分都是正向的了.

易见

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

而

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw.$$

另一方面，当 $w\in C'$，则有一致收敛的展开式

$$\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z-a}+\frac{w-a}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\cdots,$$

故

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(w)dw+\cdots$$

$$+\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)dw+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

此处

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)dw.$$

因此得到 Laurent 展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

此处

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw,\quad n=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

这儿积分是沿环内任一绕圆心的围道进行的.

显而易见，$z-a$ 正幂各项所成的级数，当 $|z-a|<R$ 时收敛；而负幂各项所成的级数，当 $|z-a|>R'$ 时收敛.

与 Fourier 级数联合起来看，问题更为清楚(不妨假定 $a=0$)：

在单位圆周上有 Fourier 级数

$$\varphi(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{ni\theta}.$$

一般有，令

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}},$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

在圆 $|z|<R$ 内收敛，而

$$\frac{1}{R'}=\lim_{n\to\infty}|a_{-n}|^{-\frac{1}{n}},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}z^{-n}$$

在圆 $|z|>R'$ 外收敛. 如果 $R'<R$, 则在 $R'<|z|<R$ 中有解析函数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n.$$

例 1.

$$e^{\frac{1}{2}c\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n,$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(c\sin\theta-n\theta)}d\theta.$$

例 2. 当 $C>0$ 时

$$e^{z+\frac{C^3}{2z^2}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n.$$

这儿

$$a_n=\frac{e^{-\frac{1}{2}C}}{2\pi c^n}\int_0^{2\pi}e^{C(\cos\theta+\cos^2\theta)+i(c\sin\theta(1-\cos\theta)-n\theta)}d\theta.$$

§9. 零 点，极 点

定义 1. 如果 $f(z)$ 在 $z=a$ 解析，而展开式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

如果 $a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0$，而 $a_m\neq 0$，则 $z=a$ 称为 $f(z)$ 的一个 m 重零点；1 重零点称为单零点.

定理 1. 零点是孤立的. 也就是，如果 a 是一解析函数 $f(z)(\neq 0)$ 的零点，而且在 a 的一邻域内 $f(z)$ 解析，则有一 $\rho_1>0$ 存在，在圆 $|z-a|<\rho_1$ 中不再有 $f(z)$ 的零点.

证. 不妨假定 $a=0$，假定

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<R.$$

如果全部系数 $a_n=0$，则 $f(z)\equiv 0$. 今假定 $a_1=\cdots=a_{k-1}=0$，而 $a_k\neq 0$，则

$$f(z)=z^k(a_k+a_{k+1}z+\cdots),\quad (|z|<R).$$

令 $0<\rho<R$，则级数当 $z=\rho$ 时收敛,因此 $a_n\rho^n$ 有界,即有K使 $|a_n|\rho^n<K$，因此

$$|f(z)|\geqslant|z|^k\left(|a_k|-\frac{K|z|}{\rho^{k+1}}-\frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}}-\cdots\right)$$

$$=|z|^k\left(|a_k|-\frac{K|z|}{\rho^k(\rho-|z|)}\right).$$

当

$$0<|z|<\rho_1=\frac{|a_k|\rho^{k+1}}{K+|a_k|\rho^k}$$

时，$|f(z)|>0$，故得所证.

由此推得:

(i) 如果 $f(z)$ 在D内的一小块域内或一个连续曲线段上为 0, 则 $f(z)\equiv 0$.

(ii) 如果 $f(z)$ 在域D内解析,如果 $z_1, z_2, \cdots, z_n\cdots$ 是一点集以 z_0 为其极限点,而 z_0 是D的内点,如果 $f(z_i)=0$，$i=1,2,\cdots$，则 $f(z)\equiv 0$.

(iii) 如果 $f(z)$, $g(z)$ 都在D内解析,而且

$$f(z_i)=g(z_i),\quad i=1,2,\cdots,$$

而 $z_i\to z_0$ 是D的内点,则 $f(z)\equiv g(z)$.

令 a 是 $f(z)$ 的 k 重零点,如此

$$f(z)=(z-a)^k g(z),$$

而且有 ρ，在 $|z-a|<\rho$ 中 $g(z)$ 无零值,因此 $\frac{1}{g(z)}$ 在 $|z-a|<\rho$ 内是解析的，因此

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^k}[b_0+b_1(z-a)+\cdots],\quad b_0\neq 0.$$

定义. 如果 $h(z)$ 在 $z=a$ 的一个邻域解析,但 $z=a$ 除外,而且:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k h(z)=C\neq 0,$$

则 $z=a$ 称为 $h(z)$ 的 k 重极点. 1 重极点称为单极点. 因此,如果 $f(z)$ 以 a 为 k 重零点,则 $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为其 k 重极点,反之亦真.

例 1. 函数 $\sin z$ 在 $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 处有一阶零点,而无其他零点.

由

$$|\sin(x+iy)|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}=0,$$

可知必须

$$\sinh y=\sin x=0,\ \text{即}\ y=0\ \text{及}\ x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots,$$

又

$$\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right),$$

所以在 $z=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \cdots$ 处有一阶零点,而无其他零点.

例 2. ctg z 与 csc z 在 $z=0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\cdots$ 处有一阶极点，tg z 与 sec z 在 $z=\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\cdots$ 处有一阶极点，而无其他极点.

习题 1. 求

$$\frac{1}{\sin z \pm \sin a}, \quad \frac{1}{\cos z \pm \cos a}$$

的极点.

习题 2. $\cos z^2$ 有一个二重极点及无穷个单极点.

习题 3. 如果 $f(z)$, $g(z)$ 都是 D 内的解析函数，而 $f(z)g(z)\equiv 0$，则 $f(z)\equiv 0$ 或 $g(z)\equiv 0$.

§ 10. 孤 立 奇 点

假定 $f(z)$ 在一点 a 的邻域内解析，但 $z=a$ 除外，这样的点称为 $f(z)$ 的孤立奇点.

假定 $f(z)$ 是单值的，则由 § 7 有 Laurent 展开式:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}, \quad 0<|z-a|<R.$$

有三种可能性:

(i) 所有的 b_n 都等于 0，如果我们定义 $f(a)=a_0$，则 $f(z)$ 在 $z=a$ 处解析.

(ii) 如果只有有限项 b_n 不等于 0，令 $b_m\neq 0$, $b_{m+1}=\cdots=b_n=\cdots=0$，则 $(z-a)^m f(z)$ 在该点邻域内解析，即 a 是 $f(z)$ 的一个 m 重极点. 而

$$\sum_{n=1}^{m} b_n(z-a)^{-n}$$

称为 $f(z)$ 在此极点 $z=a$ 的主要部分，显然有

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty, \quad \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=b_m.$$

(iii) 有无穷个 $b_n\neq 0$，这样的 a 点称为 $f(z)$ 的**本质奇点**，而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

称为 $f(z)$ 在本质奇点 a 的主要部分. 关于本质奇点有以下的著名定理.

定理 1 (Weierstrass). 设 a 为 $f(z)$ 的本质奇点，给与任二正数 ρ, ε 及任一复数 C，在圆 $|z-a|<\rho$ 中有一 z 使

$$|f(z)-C|<\varepsilon.$$

换言之，给了任一复数 C，我们可以找到一个贯: $z_1, \cdots, z_n, \cdots$ 以 a 为极限，而且

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=C.$$

定理中并不排斥 $C=\infty$ 的情况，但结论改变为: 在圆 $|z-a|<\rho$ 有 z 使

$$|f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

证. 1) 我们先证明 $C=\infty$ 的情况，如果结论不正确，则有 $\rho>0$，及一正数 M，使得在 $|z-a|<\rho$ 时

$$|f(z)|\leqslant M.$$

以 a 为心在 $|z-a|<\rho$ 内作一圆 C'.

$$|b_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)dw\right|\leqslant MR'^n.$$

这儿 R' 为 C' 的半径，R' 可以取为任意小的正数，因此对任一正整数 n，常有 $b_n=0$，这是与假定相违背的.

2) 考虑任一 C，如果在任一圆 $|z-a|=\rho$ 内，$f(z)-C$ 有零点，那就不必证明了，不然取 ρ 使 $f(z)-C$ 在 $|z-a|<\rho$ 中无零点，则在 $|z-a|<\rho$ 内除 $z=a$ 外，函数

$$\phi(z)=\frac{1}{f(z)-C}$$

是解析的，因此 $z=a$ 也是 $\phi(z)$ 的本质奇点. 因为，如果在 $z=a$，$\phi(z)$ 解析或为极点，则

$$f(z)=\frac{1}{\phi(z)}+C$$

最多可能有极点，而 $z=a$ 不能是 $f(z)$ 的本质奇点.

由 1) 可知在 $|z-a|<\rho$ 中有 z 使

$$|\phi(z)|>\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$|f(z)-C|<\varepsilon.$$

Weierstrass 定理明确地刻划出极点与本质奇点的差异. 由此定理引出了一系列的研究工作，我们将在本册第十三、十四章中谈及.

例 1. 函数

$$e^{\frac{1}{z}},\quad \sin\frac{1}{z},\quad \cos\frac{1}{z}$$

都在 $z=0$ 处有孤立本质奇点.

例 2. $\csc\frac{1}{z}$ 在 $z=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极点，而 0 是 $\frac{1}{n\pi}$ 的极限，因此 0 为非孤立奇点，我们有时也称之为本质奇点.

例 3. 考虑 $w=e^{\frac{1}{z}}$，如果 $w\neq0$，则

$$\frac{1}{z}=\log w+2\pi mi,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

即有无穷个 z 使 $e^{\frac{1}{z}}=w$，另一方面

$$\lim_{z\to+0}e^{-\frac{1}{z}}=0.$$

§ 11. 无穷远点的解析性

$g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ 在 $w=0$ 处的性质，定义为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性质.

例如：函数

$$f(z)=\frac{1}{z^2},\quad \frac{1}{z^2+az+b}$$

以无穷远点为其二重零点，而

$$z^3+az+b$$

以无穷远点为其三重极点，又如 e^z 以无穷远点为其本质奇点.

定理 1. 包括无穷远点在内处处解析的函数是一常数.

证. 作 Laurent 表达式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n}.$$

由于 $z=0$ 处解析，所以 $b_n=0$；又由于在 $z=\infty$ 处解析，所以 $a_n=0(n>0)$.

定理 2. 除极点以外无其他奇点的函数是有理函数，并且反之亦真.

首先，说明只有有限个极点，不然，这些极点一定有一个极限点，有限或无穷，对这样的极限点，函数既不能解析，又不能是极点，与假定相违背.

假定

$$a,b,\cdots,k$$

是 $f(z)$ 的 $\alpha,\beta,\cdots,\kappa$ 重极点，则

$$g(z)=f(z)(z-a)^{\alpha}\cdots(z-k)^{\kappa}$$

是一个处处解析的函数，但∞可能除外，在∞处可能有一极点，故

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

$$g\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{w^n}.$$

由于 $g\left(\frac{1}{w}\right)$ 在 $w=0$ 只能有一极点，因此 $g(z)$ 是一多项式，因而 $f(z)$ 是二多项式之商，即有理函数.

逆定理部分是显然不待证明的.

但可以说明得具体些，如果一个有理函数表成为

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

这儿 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 是无公因子的二多项式，在有限平面上 $f(z)$ 的零点个数等于 $P(z)$ 的次数 n（l 重零点作为 l 个零点计算），$f(z)$ 的极点数等于 $Q(z)$ 的次数 m；∞ 点是 $f(z)$ 的 $n-m$ 重极点（如果 $n>m$），或是 $m-n$ 重的零点（如果 $m>n$）.

对复平面上每一点 a 可定义一个整数 $l(a)$

$$l(a)=\begin{cases} n, & \text{如果 } f(z) \text{ 以 } a \text{ 为 } n \text{ 重零点,} \\ 0, & \text{如果 } f(z)\neq 0,\infty, \\ -n, & \text{如果 } f(z) \text{ 以 } a \text{ 为 } n \text{ 重极点.} \end{cases}$$

则有理函数有次之性质

$$\Sigma l(a)=0,$$

这和号中 a 过所有的复数,包括∞在内.

定理 3 (Liouville). 一函数在平面的有限部分处处解析,而且一致有界,则它是一常数.

证. 无穷远点只可能是一孤立奇点,但有界,所以函数在无穷远点也是解析的,应用定理 1,立得证明.

极易推广为

定理 4. 如果在所有的有限点,$f(z)$ 是解析的,而且

$$f(z)=O(|z|^k),\quad |z|\to\infty,$$

则 $f(z)$ 是一个多项式,其次数 $\leqslant k$.

§ 12. Cauchy 不等式

定理 1. 令

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\quad |z|<R,$$

及 $M(r)$ 表 $|f(z)|$ 在圆周 $|z|=r(r<R)$ 上的最大值,则

$$|a_n|r^n\leqslant M(r),\quad n=0,1,2\cdots.$$

证. 由

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

可以推出

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}.$$

定理 2. 令 $A(r)$ 是 $\boldsymbol{R}f(z)$ 在圆周 $|z|=r(r<R)$ 上的最大值,则

$$|a_n|r^n\leqslant\max(4A(r),0)-2\boldsymbol{R}f(0),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

证. 令 $z=re^{i\theta}$, $a_n=\alpha_n+i\beta_n$; 及

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=u(r,\theta)+iv(r,\theta),$$

则

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n.$$

这幂级数是一致收敛的,乘以 $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 而求积分得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\cos n\theta d\theta=\alpha_nr^n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\sin n\theta d\theta = -\beta_n r^n, \quad n>0,$$

及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)d\theta = \alpha_0,$$

故

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n)r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta, \quad n>0.$$

即得:

$$|a_n|r^n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |u(r,\theta)|d\theta.$$

因此得

$$|a_n|r^n + 2\alpha_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [|u(r,\theta)| + u(r,\theta)]d\theta.$$

若 $u<0$, 则 $u+|u|=0$, 故 $A(r)<0$ 时, 上式右边为 0. 若 $A(r)\geqslant 0$, 则右边

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2A(r)d\theta = 4A(r).$$

即得定理.

对于 $\boldsymbol{R}f(z)$ 的下界及 $If(z)$ 的上、下界的情形有相仿的定理.

定理 3. 在有限平面上, $f(z)$ 无处不解析, 而 $A(r)$ 有界, 则 $f(z)$ 是常数, 如果 $A(r)<Ar^k$, 则 $f(z)$ 是一不超过 k 次的多项式.

证. 由定理 2 推得对任一 $n\geqslant 1$, $|a_n|r^n$ 有界 $(r\to\infty)$, 因此 $f(z)$ 是一常数,其次由 $|a_n|r^n = O(|z|^k)$ 可以推得当 $n>k$ 时 $|a_n|=0$, 即得所求.

定理 4. 在有限平面上调和的函数,而且有界,则是一常数.

§ 13. 解 析 拓 展

我们现在全局性地来考虑解析函数,假定 $f(z)$ 在 z_0 附近解析,则可以展开为 $z-z_0$ 的幂级数.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{1}$$

假定这个幂级数收敛半径为 ρ, 其意义是 z_0 与 $f(z)$ 的奇点的最近距离. 理由是: (i) 显然在 $|z-z_0|<\rho$ 中 $f(z)$ 是解析的. (ii) 如果在边界 $|z-z_0|=\rho$ 上没有奇点, 则有 $\varepsilon>0$ 存在,在圆 $|z-z_0|\leqslant\rho+\varepsilon$ 上, $f(z)$ 是解析的, 由 Cauchy-Taylor 展式可知 (1) 在 $|z-z_0|<\rho+\varepsilon$ 中收敛,这与收敛半径的定义相违背.

一般地说,假定 $f(z)$ 在有界曲线 Γ 上每一点都是解析的. 这曲线由 z_0 到 z 每一点都有一个收敛半径,这些圆覆盖了整个曲线 Γ, 由 Heine-Borel 定理,其中有有限个圆覆盖了整条曲线 Γ, 假定他们的圆心依次是

$$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n = z,$$

所对应的圆是

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n.$$

我们现在证明，如果在任一 C_i 内知道了 $f(z)$ 的幂级数展开式，则我们可用以下的方法求出在 C_j 内的幂级数展开式．实质上，由于这些圆内的点组成连通开集，故只需考虑 C_i 与 C_{i+1} 为相邻且有公共部分的情形即可．

两圆交点的距离令之为 2δ，两圆心的距离令之为 η，把 η 分为 $l=\left[\dfrac{\eta}{\frac{1}{2}\delta}\right]+1$ 份．每份长度小于 $\dfrac{\delta}{2}$，从圆心 z_i 到圆心 z_{i+1} 的直线上列上这些分点：

$$z_i, z_i', z_i'', \cdots, z_i^{(l)}=z_{i+1},$$

在 $z_i^{(j)}$ 有一幂级数展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z-z_i^{(j)})^n, \tag{2}$$

它的收敛半径 $\geqslant \delta$，因此可以从 (2) 式计算出 $f^{(n)}(z_i^{(j+1)})$，因而得出在 $z_i^{(j+1)}$ 的幂级数展开，这展式的收敛半径 $\geqslant \delta$，因而包有 $z_i^{(j+2)}$ 等等．这样的计算方法，可以由 z_i 到 z_{i+1}，也可以从 z_0 到 z．这样的手续称为解析拓展．

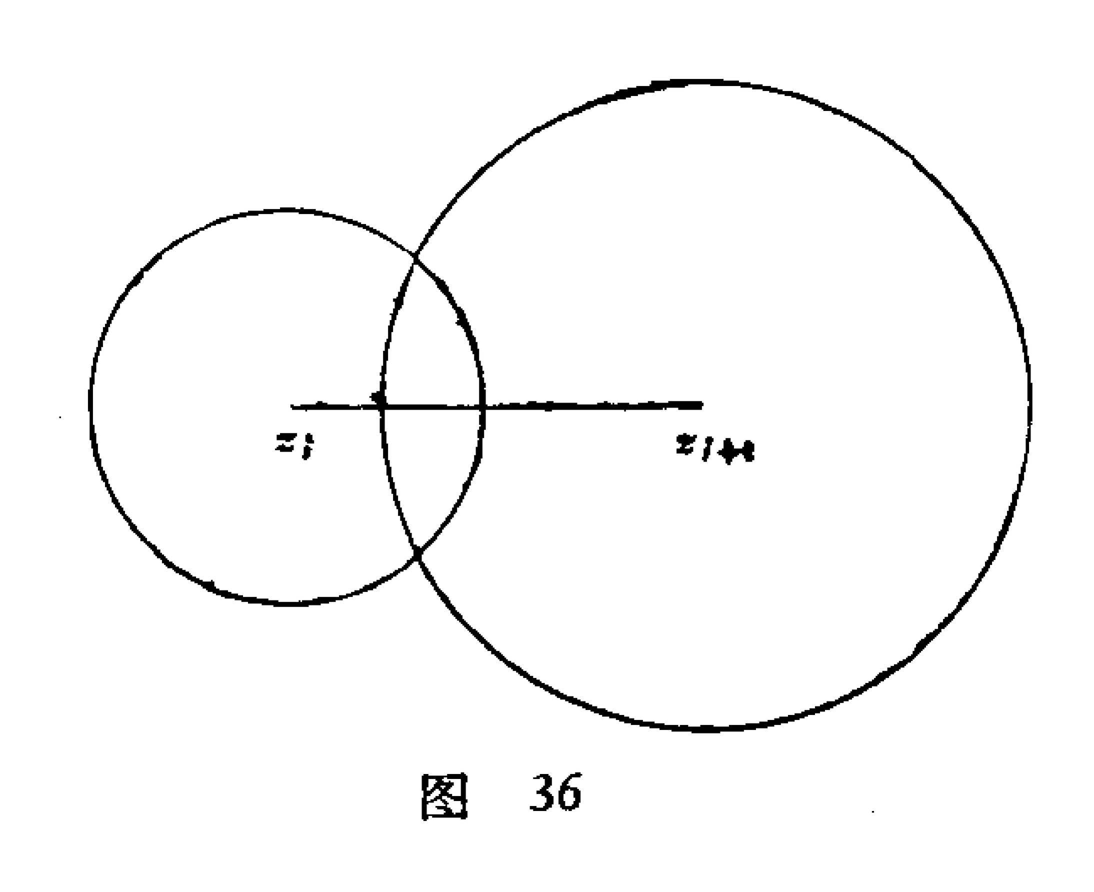


图 36

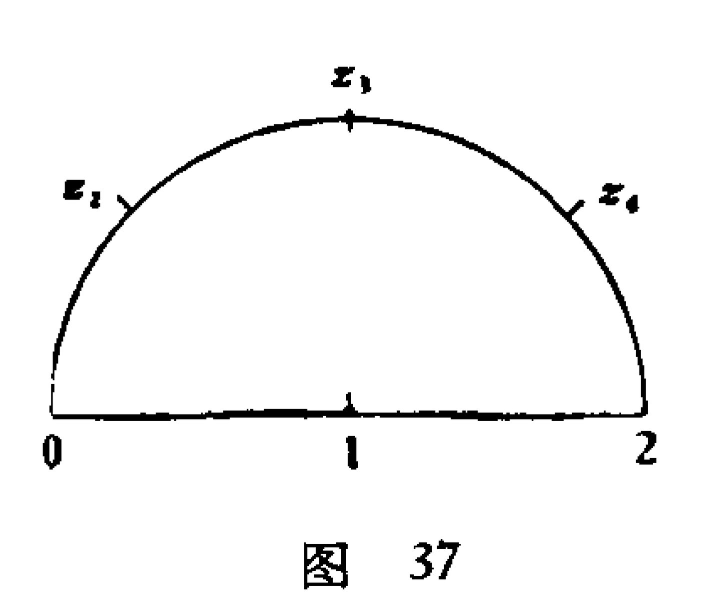


图 37

例如，级数

$$1+z+z^2+\cdots, \quad |z|<1$$

可以沿 $|z-1|=1$ 的上半圆弧解析拓展到 $z=2$，而得到 $z=2$的幂级数．具体办法：在 $|z|<1$ 内取 $z_2=1+e^{\frac{3\pi i}{4}}$ 算出 $z-z_2$的幂级数，且在 $|z-z_2|\leqslant 1$ 内收敛．再在此圆内取 $z_3=1+i$，算出 $z-z_3$ 的幂级数．再取 $z_4=1+e^{\frac{\pi j}{4}}$，而得 $z=2$ 的幂级数．

因此得出二级数

$$1+z+z^2+\cdots, \quad |z|<1,$$
$$-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots, \quad |z-2|<1.$$

并无一个公共的 z 的可以使两者都收敛，但他们可以用解析拓展法由其一得另一．实质上，他们在某一特定范围内都代表了函数

$$\frac{1}{1-z},$$

只需把它在 $z=2$ 处展为幂级数即知．

更一般地，我们有

定理． 设 D_1, D_2 为有公共部分 D 的两域，$f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 分别在 D_1, D_2 上单值解析，

且在 D 上相等. 则存在唯一的在 $D_1 + D_2$ 上的单值解析函数 $F(z)$，在 D_1 等于 $f_1(z)$；在 D_2 等于 $f_2(z)$.

证明可由解析函数只有孤立零点的定理推得.

§14. 多 值 函 数

用解析拓展法可能出现以下情况，由 z_0 到 z_1 循一条曲线得 $f_1(z_1)$，而循另一条曲线可能得 $f_2(z_1)$，$f_1(z_1) \neq f_2(z_1)$. 这样的函数称为多值函数. 我们把多值函数分成为若干分支，例如：$\sqrt{z}$ 在平面上沿负实轴由 0 到∞切开，在这样的区域中 $\sqrt{z}$ 可以区别为两个分支

$$\sqrt{r}\, e^{i\frac{1}{2}\theta},\quad -\sqrt{r}\, e^{i\frac{1}{2}\theta},\quad -\pi < \theta < \pi,$$

如果不切开，则绕 0 一周，就由前一分支变为后一分支了，具体可以用幂级数算出；沿单位圆各以 $1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3}{4}\pi}, -1, e^{i\frac{5}{4}\pi}, e^{i\frac{3}{2}\pi}, e^{i\frac{7}{4}\pi}$ 为中心逐步作幂级数，则 $e^{i\frac{7}{4}\pi}$ 为中心的圆包有 1，但这样的幂级数在 $z = 1$ 已取另外一个分支的值了.

同样，$\log z$ 在如上法割开的区域有无穷多个分支

$$\log r + i(\theta + 2n\pi),\quad -\pi < \theta < \pi,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots,$$

对应于一个整数 n，有一个分支. 我们还用 $\log z$ 表示未经切开平面上的函数. 当然，必须注意：这函数的意义是从何值出发，经过怎样的途径而得来的.

如果 α 是任一实数，而非有理的，则定义

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

也是一个有无穷分支的函数(在切开的平面上).

这样的奇点称为分支点(或歧点)，确切的定义是，如果循一充分小的圆绕 z_0 一周，$f(z)$ 的数值变了，则 z_0 称为函数 $f(z)$ 的歧点.

例 1. 函数 $z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}}$ 有两个歧点：$z = 0$ 与 $z = 1$. 它有六个分支：

$$z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad e^{i\frac{2\pi}{3}} z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad e^{i\frac{4\pi}{3}} z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},$$

$$-z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad -e^{i\frac{2\pi}{3}} z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad -e^{i\frac{4\pi}{3}} z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}}.$$

绕 $z = 0$ 一转，上下互换，绕 $z = 1$ 一转，同行轮换.

例 2. 函数

$$\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}$$

在 $|z| < 1$ 中有一分支等于

$$\frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots\right),$$

在 $z = 0$ 这函数是解析的，但其他各分支都以 0 为其极点.

如果所考虑的区域是单连通的，并且在其中每一点函数是解析的，则循任何一线由 z_0 到 z_1 解析拓展出来的函数是唯一的. 这点证明的大意是：任一路线可以连续演变为另一路线.

以往定义解析函数是指定在某一区域中，现在我们可以整体地来定义解析函数了，就

是从一某一区域的解析函数出发作它的解析拓展，及拓展的拓展等等．这样，可能拓展到整个平面或除去若干点的全平面，也可能拓展成某一区域，而无法再拓展，后者称为存在区域，其边界称为函数的自然边界．在多值函数的情况下，则得出多个分支．

因此，我们有极点、本质奇点、分支点，这些是孤立奇点，我们还可能有非孤立奇点．例如

$$f(z)=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots$$

以 $|z|=1$ 为其自然边界．

当 $z\to 1-0$ 时，$f(z)\to\infty$，所以 $z=1$ 是奇点，由

$$f(z)=z^2+f(z^2)$$

可知，如果 α 是 $f(z)$ 的奇点，则 $\alpha^{\frac{1}{2}}$ 也一定是 $f(z)$ 的奇点，因此

$$z=1,\ -1,\ \pm i,\ \pm\sqrt{\pm i},\cdots$$

都是奇点，这些奇点在单位圆周上无处不稠密，因而此函数无法扩充到单位圆外去．

有时我们还用以下的

定义． 一个单值函数的解析拓展所用到一些圆的内点称为有则点或函数在该点有则，任何一个有则点的极限点，如果本身非有则，则称为奇点．

“有则”比“解析”要求得稍多些，例如函数

$$f(z)=\begin{cases}e^{\frac{1}{z}}, & 当\ |z|>0,\ |\arg z|\leqslant\frac{1}{4}\pi;\\ 0, & 其他各处.\end{cases}$$

这函数在以前所讲过的定义下在 $z=0$ 解析，而且 $f'(0)=0$，但考虑以 $0,\ 1\pm\frac{1}{2}i$ 为顶点的三角形，这函数在这三角形的边上及其中无处不解析，但在 $z=0$ 处非有则．但这样的区别并不重要，其理由是：仅有若干造作的函数才有此区别(如上举之例)．

§15. 奇点的位置

我们已经知道在幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

的收敛圆上一定有一个奇点，而这幂级数的收敛半径又等于

$$R=\varliminf_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}}.$$

因此函数 $f(z)$ 有一个奇点 z_0，它的绝对值等于 R．

圆上哪一点是奇点？这是一个不易解答的问题．具体些，假定 $R=1$，是否 $z=1$ 是 (1) 的奇点？在 $z=\frac{1}{2}$ 展开 $f(z)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(z-\frac{1}{2}\right)^n.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}|b_n|^{-\frac{1}{n}} > \frac{1}{2},$$

则以 $\frac{1}{2}$ 为中心的收敛圆包有1，即 $z=1$ 不是奇点．但如果

$$\lim_{n\to\infty}|b^n|^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

则解析拓展无法超越 $z=1$，而单位圆周上除 $z=1$ 外任一点与 $\frac{1}{2}$ 的距离都 $>\frac{1}{2}$，故 $z=1$ 是一奇点．因此得出一个判别条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

是 $z=1$ 为 $f(z)$ 的奇点的必要且充分条件．这个条件运用起来十分不简单．

我们考虑

$$F(w) = \frac{1}{1-w} f\left(\frac{w}{1-w}\right).$$

当 $\boldsymbol{R}w < \frac{1}{2}$ 时 $|w| < |1-w|$，因此 $F(w)$ 在 $\boldsymbol{R}w < \frac{1}{2}$ 时有则，在 $|w| < \frac{1}{2}$ 内展开成为：

$$F(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m w^m}{(1-w)^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m+r)!}{m!r!} w^r$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} a_m.$$

令

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a_m,$$

$z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点的必要且充分条件是 $F(w)$ 以 $w=\frac{1}{2}$ 为奇点，而且在 $|w|=\frac{1}{2}$ 上 $F(w)$ 仅有奇点 $w=\frac{1}{2}$，而其他的点都是有则的，所以充要条件也是

$$\lim_{n\to\infty}|b_n|^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

用这条判别式来判断奇点也不简单．

不难推得

定理1. 如果 $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的收敛半径是1，令

$$b_n(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a_m e^{im\theta},$$

$z=e^{i\theta}$ 是奇点的必要充分条件是

$$\lim_{n\to\infty}|b_n(e^{i\theta})|^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

定理 2. 如果 $a_n\geqslant 0(n=0,1,2,\cdots)$，并且单位圆是收敛圆，则 $z=1$ 是奇点。

证．如果 $z=1$ 非奇点，则

$$\lim_{n\to\infty}|b_n(1)|^{-\frac{1}{n}}=\tau>\frac{1}{2}.$$

由于

$$|b_n(e^{i\theta})|\leqslant|b_n(1)|,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}|b_n(e^{i\theta})|^{-\frac{1}{n}}\geqslant\lim_{n\to\infty}|b_n(1)|^{-\frac{1}{n}}=\tau>\frac{1}{2},$$

即圆上处处解析，这与假定相违背．

定理 2 中的假定如果改为有充分大的 N，当 $n>N$ 时，常有 $a_n\geqslant 0$，定理照样成立．

附记．幂级数的收敛与发散并不能说明函数的有则与奇点。

例 1.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}=\log\frac{1}{1+z}$$

在 $z=1$有则，级数也收敛，在 $z=-1$ 是一奇点，级数也发散．

例 2.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z}$$

在点 $z=1$ 有则，而级数是发散的．

例 3.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=\int_0^z\frac{1}{w}\log\frac{1}{1-w}\,dw$$

在奇点 $z=1$ 级数收敛．

第七章　留数及其应用于定积分的计算

§1. 留　　数

假定 $z=a$ 是 $f(z)$ 的一孤立奇点,而且有展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-a)^{-n}.$$

其中 b_1 有特殊重要性,称为函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 处的留数,由 Laurent 公式知

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)dz,$$

这儿 γ 是一个以 a 为中心的圆,其中不包有 $f(z)$ 的其他奇点.

如果 a 是一个单极点,则显然有

$$b_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

留数定理. 在一简单闭围道 C 上及其内, $f(z)$ 是一单值函数, 除去有限个奇点 $z_1, \cdots, z_n$ 外, $f(z)$ 在 C 上及其内是解析的. 命 $f(z)$ 在 $z_1, \cdots, z_n$ 处的留数各为 R_1, $R_2, \cdots, R_n$, 则

$$\int_C f(z)dz=2\pi i(R_1+R_2+\cdots+R_n).$$

证. 以 $z_1, \cdots, z_n$ 为圆心各作一小圆 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, 它们含在 C 内且互不重迭和相交,则 $f(z)$ 在 C 内及这些小圆外是解析的,因此

$$\int_C f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n}f(z)dz=2\pi i(R_1+R_2+\cdots+R_n).$$

§2. 有理函数沿圆周的积分

算出

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{P(z)}{Q(z)}dz.$$

这儿 P 和 Q 都是 z 的多项式,且 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 无公因子, $Q(z)$ 在 $|z|=r$ 上无 0 点.

$$Q(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{m_i}.$$

用分项分数法把 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 写成为

$$R(z)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_{i1}}{z-a_i}+\frac{R_{i2}}{(z-a_i)^2}+\cdots+\frac{R_{im}}{(z-a_i)^{m_i}}\right),$$

如果 $a_1, \cdots, a_m$ 在圆内，$a_{m+1}, \cdots, a_n$ 在圆外，则

$$I = \sum_{i=1}^{m} R_{i1}.$$

例 1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)} = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{z+2} = \frac{2}{3}.$$

又形如

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

的积分，其中 $R(x, y)$ 是有理函数，可以通过变换 $e^{i\theta} = z$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z+z^{-1}),\quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(z-z^{-1}),$$

变为

$$\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)dz,$$

而化为以上的形式.

例 2. 当 $0<p<1$ 时，积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = \int_{|z|=1}\frac{dz}{i(1-pz)(z-p)}.$$

$z=p$ 是单位圆内唯一的单极点，因此

$$\lim_{z\to p}\frac{z-p}{i(1-pz)(z-p)} = \frac{1}{i(1-p^2)},$$

因而得出

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+2p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

例 3. 当 $0<p<1$ 时

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta = \int_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^{-3}\right)^2\frac{1}{(1-pz)(1-pz^{-1})} = 2\pi\sum R.$$

这儿 $\sum R$ 表单位圆内函数 $\dfrac{(z^6+1)^2}{4z^6(1-pz)(z-p)}$ 各奇点的留数之和. 在其中有两个极点 $z=0$, $z=p$. 后者是单极点，易知其留数等于 $\dfrac{(p^6+1)^2}{4p^6(1-p^2)}$. 在 $z=0$ 处，把该函数展为

$$-\frac{1}{4}\left(z^6+2+\frac{1}{z^6}\right)(1+pz+p^2z^2+\cdots)\left(1+\frac{z}{p}+\frac{z^2}{p^2}+\cdots\right)\frac{1}{p},$$

由此知留数为

$$\frac{1}{-4p}(p^{-5}+p^{-3}+p^{-1}+p+p^3+p^5).$$

故积分等于

$$2\pi\left[\frac{(p^6+1)^2}{4p^6(1-p^2)}-\frac{1-p^{12}}{4p^6(1-p^2)}\right]=\pi\frac{1+p^6}{1-p^2}.$$

§3. 由$-\infty$到$+\infty$的某种积分

现在计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Q(x)dx.$$

假定 $Q(z)$ 适合以下的条件：(i) 在上半平面与 x 轴上，除去有限个极点外，$Q(z)$ 解析，并且是单值的；(ii) 在 x 轴上无极点；(iii) 当 $z\to\infty$ 时，在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 内，$zQ(z)$ 一致趋于 0；再假定 (iv)

$$\int_0^{\infty}Q(x)dx,\ \int_{-\infty}^0 Q(x)dx$$

收敛。

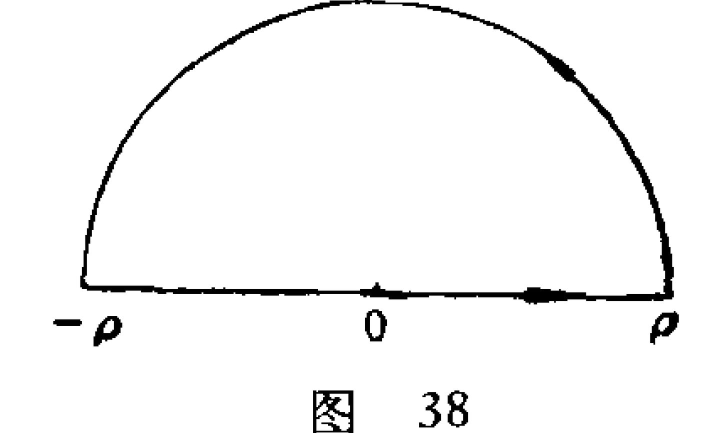


图 38

命 C 代表一围道由 $-\rho$ 沿 x 轴到 ρ，再沿以 0 为中心，ρ 为半径的上半平面上的圆弧 r 由 ρ 到 $-\rho$，当 ρ 足够大

$$\int_C Q(z)dz=2\pi i\sum R,$$

这儿 $\sum R$ 过函数 $Q(z)$ 在上半平面的奇点的留数之和，因此

$$\left|\int_{-\rho}^{\rho}Q(z)dz-2\pi i\sum R\right|=\left|\int_r Q(z)dz\right|,$$

由假定 (iii) 可取 ρ 使 $|z|=\rho$ 时

$$|zQ(z)|<\varepsilon,$$

如此则

$$\left|\int_r Q(z)dz\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\rho}\int_r|dz|=\varepsilon\pi.$$

故得

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}Q(z)dz=2\pi i\sum R.$$

由 (iv) 可知

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)dx=2\pi i\sum R.$$

注意如果 (iv) 不适合，而把积分理解为 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}$，也得上式。

例 1. 求证

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

由上公式

$$2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi iR.$$

这个 R 是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x=i$ 处的留数，即

$$R=\lim_{x\to i}\frac{x-i}{1+x^2}=\frac{1}{2i},$$

即得所求.

例 2. $(z^2+1)^{-3}$ 在上半平面有一极点 $z=i$，该处留数是 $-\frac{3}{16}i$，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{3}{8}\pi.$$

例 3. 如 $a>0$，$b>0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4dx}{(a+bx^2)^4}=\frac{\pi}{16a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}}.$$

习题 1. 求 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$，$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+1}$，$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$ 之值.

习题 2. 求证 $\int_0^{\infty}\frac{\log^2 z}{1+z^2}dz=\pi^3/8$.

习题 3. 求证 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\pi$,

并求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{[(t-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(At^2+2Bt+c)^{n+1}}$ 之值.

习题 4. 若 $0<\operatorname{Re}a<1$,则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}dx}{1+e^x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$.

若 $0<\operatorname{Re}a<1$，$0<\operatorname{Re}b<1$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}dx=\pi(\operatorname{cth}a\pi-\operatorname{cth}b\pi).$$

§ 4. 某些包有正弦余弦的积分

如果 $Q(z)$ 仍然适合上节的条件 (i), (ii), (iii)，则对 $m>0$，函数 $Q(z)e^{imz}$ 仍然适合这些条件,故

$$\int_0^{\infty}(Q(x)e^{imx}+Q(-x)e^{-imx})dx=2\pi i\sum R'. \tag{1}$$

这儿 $\sum R'$ 是函数 $Q(z)e^{imz}$ 在上半平面留数之和，但在此情况下，我们可以减弱条件 (iii)，即这条件可以换为

(iii) 在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 上,当 $|z|\to\infty$ 时，$Q(z)$ 一致趋于 0，由上节的证明可见，所需证明的是

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma}e^{imz}Q(z)dz=0. \tag{2}$$

此处 γ 是上半平面的圆周 $z=\rho e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，取 ρ 充分大使 $|Q(\rho e^{i\theta})|<\varepsilon$，如此则

$$\left|\int_{\gamma}e^{imz}Q(z)dz\right|=\left|\int_0^{\pi}e^{im(\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta)}Q(\rho e^{i\theta})i\rho e^{i\theta}d\theta\right|$$

$$<\int_0^{\pi}\varepsilon\rho e^{-m\rho\sin\theta}d\theta=2\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho e^{-m\rho\sin\theta}d\theta.$$

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 时，有 $\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}$，因此

$$\left|\int_{\Gamma} e^{imz}Q(z)dz\right| < 2\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho e^{-2m\rho\theta/\pi}d\theta = (2\varepsilon)\left(\frac{\pi}{2m}\right)[e^{-2m\rho/\pi}]_{\frac{\pi}{2}}^{0} < \frac{\varepsilon\pi}{m}.$$

即得 (2) 式，因此得出 (1) 式.

特别当 $Q(x)$ 是偶函数时，即 $Q(x)=Q(-x)$ 时，

$$\int_0^{\infty} Q(x)\cos mx dx = \pi i\sum R', \tag{3}$$

而当 $Q(x)$ 是奇函数时

$$\int_0^{\infty} Q(x)\sin mx dx = \pi\sum R'. \tag{4}$$

例 1. 当 $a>0$ 时

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-a},$$

函数 $Q(z)e^{iz}=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ 在 $z=ia$ 处的留数等于 $\frac{e^{-a}}{2ia}$，故由 (3) 得证.

例 2.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

函数

$$Q(z)e^{iz} = \frac{e^{iz}}{z}$$

在上半平面无奇点，由公式 (4) 似乎应当得 0，但须注意在 x 轴上有奇点，故以上的结果不能乱用，作围道，由 $-\rho$ 到 $-\varepsilon$，在上半平面沿小圆 $|z|=\varepsilon$ 由 $-\varepsilon$ 到 ε，再由 ε 到 ρ，沿大圆 $|z|=\rho$ 由 ρ 到 $-\rho$，然后命 $\varepsilon\to 0$，求出结果，因此异于以上的一点是求

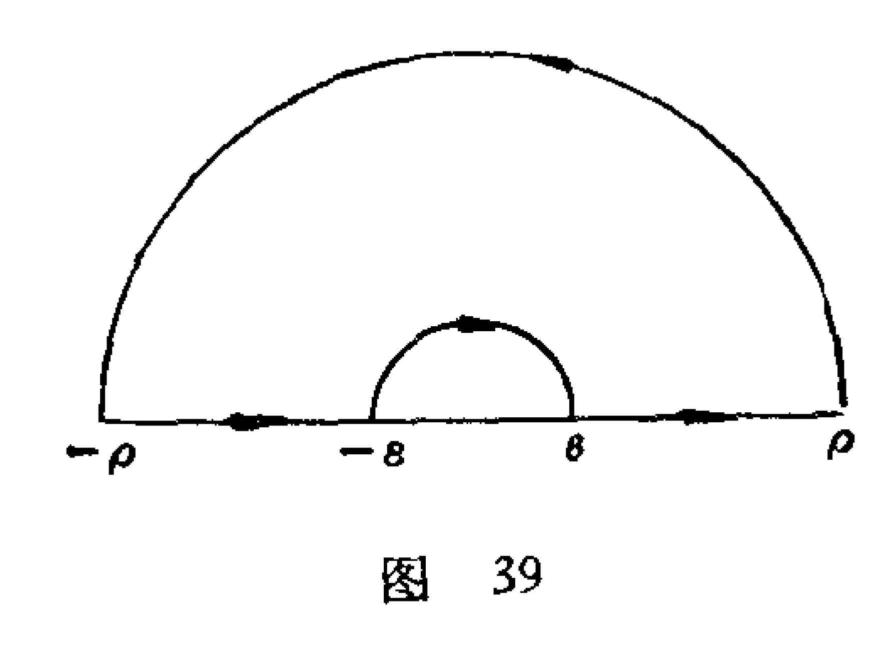


图 39

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon e^{i\theta}d\theta = -\pi i.$$

即得所求.

例 3. 当 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 时

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx = \pi(b-a).$$

这仍然有 $z=0$ 为其奇点.

例 4. 当 $\boldsymbol{R}z>0$，则

$$\int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t} = \log z.$$

由

$$\int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}}\left[\int_{\delta}^{\rho}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{\delta}^{\rho}\frac{e^{-tz}}{t}dt\right]$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}}\left[\int_{\delta}^{\rho}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{\delta z}^{\rho z}\frac{e^{-u}}{u}du\right],$$

由于 e^{-t}/t 在以 $\delta, \delta z, \rho z, \rho$ 为顶点的四边形中是解析的，因此

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-tz}) \frac{dt}{t} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}} \left[\int_\delta^{\delta z} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_\rho^{\rho z} \frac{e^{-t}}{t} dt \right].$$

由于 $\boldsymbol{R}z > 0$，所以

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_\rho^{\rho z} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

而

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{\delta z} \frac{e^{-t}}{t} dt = \log z + \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{\delta z} \log te^{-t} dt$$

$$= \log z + \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{\delta z} (t \log t - 1) e^{-t} dt = \log z.$$

习题 1. 求 $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$ 之值.

习题 2. 求证若 $c > 0$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^z}{z^2} dz = \begin{cases} \log a & (a > 1) \\ 0 & (0 < a < 1). \end{cases}$

习题 3. 求证 $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1 + a^2 - 2a \cos x} = \frac{\pi}{a} \log (1 + a) \quad (0 < a < 1),$

$$\frac{\pi}{a} \log \frac{1+a}{a} \quad (a > 1).$$

习题 4. 求证 $f(x) = \operatorname{sech} \left\{ x\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\}$ 满足方程 $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos xt dx.$

习题 5. 证明 若 $0 < a < 1$, $0 < c < 1$, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dt}{a^z \sin \pi t} = \frac{1}{\pi(1+a)}.$$

§ 5. 积分 $\int_0^\infty x^{\alpha-1} Q(x) dx$

假定 $Q(z)$ 在实轴上解析，而且当 $x \to 0$ 及 $x \to \infty$ 时，$x^\alpha Q(x) \to 0$.

作围道积分

$$\int_C (-z)^{\alpha-1} Q(z) dz.$$

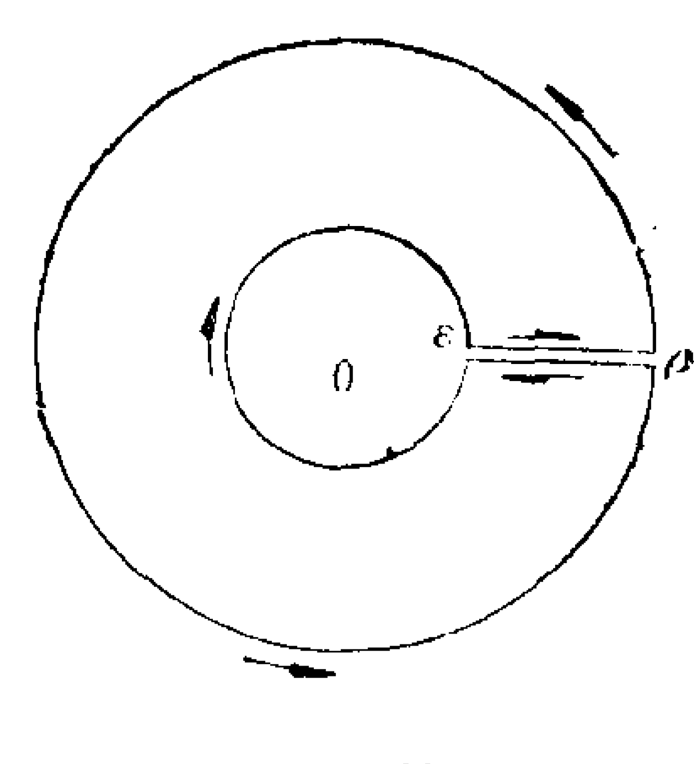


图 40

这儿围道如右图：先沿 x 轴由 ε 到 ρ，再由 ρ 绕原点沿圆一圈到 ρ，再由 ρ 到 ε，再绕原点沿圆一周到 ε.

现在必须注意由 ε 到 ρ 与由 ρ 到 ε 的积分不会消去，其原因是 $(-z)^{\alpha-1}$ 不是单值函数，这函数的意义是

$$\exp [(\alpha - 1) \log (-z)],$$

把复平面沿 0 到 $+\infty$ 的正实轴剪开，取定如下分支：

$$\log (-z) = \log |z| + i \arg (-z), \quad -\pi \leqslant \arg (-z) \leqslant \pi.$$

在这样意义下，在 C 中 $(-z)^{\alpha-1}$ 是单值的，假定 $Q(z)$ 在 C 中有有限个奇点，如此则

$$\int_C (-z)^{\alpha-1}Q(z)dz = 2\pi i \sum R.$$

此处 $\sum R$ 表示 $(-z)^{\alpha-1}Q(z)$ 在 C 中的所有留数之和.

在小圆上 $-z=\varepsilon e^{i\theta}$，积分变为

$$-\int_{\pi}^{-\pi} (-z)^{\alpha}Q(z)id\theta \to 0, \quad 当\ \varepsilon\to 0;$$

在大圆上，$-z=\rho e^{i\theta}$，积分

$$-\int_{-\pi}^{\pi} (-z)^{\alpha}Q(z)id\theta \to 0, \quad 当\ \rho\to \infty.$$

在从 ε 到 ρ 的线上 $-z=xe^{-\pi i}$，而在从 ρ 至 ε 的线上 $-z=xe^{\pi i}$，即 $(-z)^{\alpha-1}$ 各为

$$x^{\alpha-1}e^{\mp(\alpha-1)\pi i},$$

因此得出

$$\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{\rho}[x^{\alpha-1}e^{-(\alpha-1)\pi i}Q(x) - x^{\alpha-1}e^{(\alpha-1)\pi i}Q(x)]dx = 2\pi i\sum R.$$

即

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\sum R.$$

例 1. 当 $0<\alpha<1$ 时，

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

其理由是在 $z=-1$，

$$\frac{(-z)^{\alpha-1}}{1+z}$$

有一单极点，其留数等于 1.

例 2. 当 $0<\alpha<1$ 时

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx = \pi\,\mathrm{ctg}\,\alpha\pi.$$

这不能冒昧用以上的公式，原因是在积分道上有一奇点 $z=1$，在 $z=1$ 处作一半径为 r 的圆弧易得上式.

例 3. 如 $0<z<1$ 及 $-\pi<\alpha<\pi$，则

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}dt}{t+e^{i\alpha}} = \frac{\pi e^{i(z-1)\alpha}}{\sin\pi z}.$$

例 4. 如 $-1<z<3$，则

$$\int_0^{\infty}\frac{x^z}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi(1-z)}{4\cos\frac{1}{2}\pi z}.$$

例 5. 如 $-1<p<1$ 及 $-\pi<\lambda<\pi$，则

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}.$$

§6. Γ 函数

定义. 函数

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \tag{1}$$

称为 Γ 函数，当 $Rz>0$ 时，这是一个解析函数.

分部积分，则当 $Rz>1$

$$\Gamma(z)=[-t^{z-1}e^{-t}]_0^\infty+(z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}dt,$$

故有

$$\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1). \tag{2}$$

易见 $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}d=1$，所以对任一自然数 n 常有

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

$Rz>0$，$Rw>0$ 时，

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w)&=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}at\int_0^\infty s^{w-1}e^{-s}ds=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\int_0^\infty t^w v^{w-1}e^{-tv}dv\\&=\int_0^\infty v^{w-1}dv\int_0^\infty t^{z+w-1}e^{-t(1+v)}dt^*=\int_0^\infty v^{w-1}dv\int_0^\infty\frac{u^{z+w-1}e^{-u}du}{(1+v)^{z+w}}\\&=\Gamma(z+w)\int_0^\infty\frac{v^{w-1}}{(1+v)^{z+w}}dv.\end{aligned}$$

命

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

(称为 *Beta* 函数)，则得

$$B(z,w)=\int_0^\infty\frac{v^{w-1}}{(1+v)^{w+z}}dv\quad(Rz>0,\ Rw>0). \tag{3}$$

命 $v=\mathrm{tg}^2\theta$，则

$$B(z,w)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2w-1}\theta\cos^{2z-1}\theta d\theta=\int_0^1\lambda^{z-1}(1-\lambda)^{w-1}d\lambda. \tag{4}$$

在(3)式中特别取 $w=1-z$，则得

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty\frac{v^{-z}}{1+v}dv,$$

由上节例 1 可知

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(1-z)\pi}=\frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

特别取 $z=\frac{1}{2}$，得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi$，再由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$，所以

* 积分号的互换由于一致收敛性.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{5}$$

也就是

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{\pi},$$

换变数得

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}, \tag{6}$$

由定义 (1) 可知

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(\rho)}{a^\rho}\quad(\rho>0,\ a>0).$$

如果我们能进行"代换 $x=it$" 则得

$$\int_0^\infty (it)^{\rho-1}e^{-ati}idt=\frac{\Gamma(\rho)}{a^\rho},$$

乘以

$$(-i)^\rho=e^{-\frac{1}{2}i\rho\pi},$$

再分虚实部分可得

$$\int_0^\infty t^{\rho-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ atdt=\frac{\Gamma(\rho)}{a^\rho}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ \frac{1}{2}\rho\pi. \tag{7}$$

这样的换变数法需要证明，我们考虑积分

$$\int_C z^{\rho-1}e^{-az}dz\quad(a>0,\ 0<\rho<1),$$

这儿 C 先沿实轴由 ε 到 ρ，再沿 $|z|=\rho$ 经 90° 到 y 轴，沿 y 轴由 $i\rho$ 到 $i\varepsilon$，再沿小圆 $|z|=\varepsilon$ 由 $i\varepsilon$ 到 ε，这积分等于 0，不难证明，沿 $|z|=\rho$ 的积分当 $\rho\to\infty$ 时趋于 0，沿 $|z|=\varepsilon$ 的积分当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 0，因此可以这样换变数.

在 (7) 式中，特别取 $\rho=\frac{1}{2}$，则 $(a=1)$

$$\int_0^\infty \cos x^2dx=\int_0^\infty \sin x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

这是光学上出现的 Fresnel 积分.

习题 1. 求证 若 $b>a>-1$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos a\theta\cos b\theta d\theta=\frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a-1}\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+1\right)}.$$

习题 2. 求证 若 $a>0$，$-\frac{\pi}{2}<a\lambda<\frac{\pi}{2}$，则

$$\int_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ (r^a\sin a\lambda)dr=\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ \frac{\lambda}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

习题 3. 若 α 不是偶数，则当 t 沿实数趋于∞，则

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\cos xt\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{t^{\alpha+1}}.$$

§7. Cauchy 主 值

我们所定义的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

的一般意义是指极限

$$\lim_{\substack{\rho_1\to\infty\\ \rho_2\to\infty}} \int_{-\rho_2}^{\rho_1} f(t)\,dt$$

存在,如果这样的极限并不存在,但

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(t)\,dt$$

存在,则这积分称为有 Cauchy 主值,有时为了清楚起见,写成为

$$\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt.$$

当积分限为有界时,如果积分道路上有一点 ξ, $f(t)$ 在 ξ 没有定义,一般我们的积分是指

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}} \left(\int_a^{\xi-\varepsilon_1} + \int_{\xi+\varepsilon_2}^{b}\right),$$

但如果这样的极限不存在,而

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{b}\right)$$

存在,这样的积分也称为在 ξ 取 Cauchy 主值的积分,也用

$$\Gamma \int_a^b f(t)\,dt$$

表之.

例 1. 如 $C>0$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{a^z}{z}\,dz = \begin{cases}1, & a>1;\\ 0, & 0<a<1.\end{cases}$$

如 $a>1$, 即 $\log a>0$, 作围道由 $C-i\rho$ 到 $C+i\rho$, 再沿以此为直径的左半圆由 $C+i\rho$ 到 $C-i\rho$, 当 ρ 充分大时,它含有极点 $z=0$, 其留数 $=1$. 不难证明, 圆上的积分随半径增大而趋于 0.

如 $a<1$, 则向右作半圆,其中无奇点,因而积分等于 0.

例 2. 可以直接验证

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - e^{i\theta}} = \frac{1}{2}.$$

例 3. 若 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta|=1$ 上满足 Lipschitz 条件,则

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - e^{i\theta}}$$

存在

例 4. 若 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta|=1$ 上满足 Lipschitz 条件,则 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

从 $|z|<1$ 中趋于 $|\zeta|=1$ 上一点 $e^{i\theta}$ 时,等于

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-e^{i\theta}}+\frac{1}{2}f(e^{i\theta}),$$

从 $|z|>1$ 中趋于 $|\zeta|=1$ 上一点 $e^{i\theta}$ 时,等于

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-e^{i\theta}}-\frac{1}{2}f(e^{i\theta}).$$

§8. 与动量问题有关的积分

问题. 如果 $f(x)$ 是连续函数,是否可以从

$$\int_0^\infty x^n f(x)dx=0,\quad n=0,1,2,\cdots$$

获得 $f(x)=0$.

回答是否定的;例子是

$$f(x)=e^{-x^{\frac{1}{4}}}\sin x^{\frac{1}{4}},$$

换变数 $x=t^4$, 则得积分

$$4\int_0^\infty t^{4n+3}e^{-t}\sin t\,dt.$$

考虑积分

$$\int_C z^{4n+3}e^{(i-1)z}dz,$$

其围道沿实轴由 0 到 R, 再沿 $|z|=R$ 由 R 到 iR 再沿虚轴回到原点,在圆周上

$$|e^{(i-1)z}|=e^{-R\cos\theta-R\sin\theta}\leqslant e^{-R},$$

故

$$\left|\int z^{4n+3}e^{(i-1)z}dz\right|\leqslant\frac{1}{2}\pi R^{4n+4}e^{-R}\to 0.$$

从而

$$\int_0^\infty x^{4n+3}e^{(i-1)x}dx-\int_0^\infty (iy)^{4n+3}e^{(i-1)iy}i\,dy=0.$$

在后一积分换变数得

$$\int_0^\infty x^{4n+3}e^{-x}(e^{ix}-e^{-ix})dx=0.$$

即得所求.

§9. 极点与零点的个数

定理 1. 命 C 表一围道,除去 C 内有限个极点外, $f(z)$ 在 C 上及 C 内解析,则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P.$$

这儿N是C内$f(z)$的零点个数（m重零点作m个零点计算），P是C内$f(z)$的极点数（m重的极点作m个极点计算）.

假定 $z=a$ 是一个m重零点，则

$$f(z)=(z-a)^m g(z),\ g(a)\neq 0.$$

因此

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)},$$

即 $f'(z)/f(z)$ 有一单极点，其留数是m，故$f(z)$的零点数恰好是 $f'(z)/f(z)$ 在这些点的留数之和N.

同法证明$f(z)$的极点数恰好是 $-\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在这些点的留数之和P，因此得定理.

同法可证

定理 2. 如果 $\phi(z)$ 在C上及C内是解析的，而且$f(z)$在C中有零点 $a_1,\cdots,a_m$（l重的零点写l次）；有极点 $b_1,\cdots,b_n$（l重的极点写l次），则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{\mu=1}^{m}\phi(a_\mu)-\sum_{\nu=1}^{n}\phi(b_\nu).$$

定理 3. 如果$f(z)$在C中是解析的，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N.$$

由于

$$\frac{d}{dz}\log f(z)=\frac{f'(z)}{f(z)},$$

这结果可以改述为

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Delta_c \log\{f(z)\}.$$

这儿Δ_c表示函数 $\log f(z)$ 沿围道C的变化. 开始时对数的值可以任意取，取定后，当z绕围道C一周时，变化就是Δ_c. 又

$$\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg[f(z)],$$

这儿 $\log|f(z)|$ 是单值的，不变的，因此

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \arg f(z).$$

定理 4 (Rouché). 如果$f(z)$与$g(z)$都在围道C上及C内解析，而且沿C有

$$|g(z)|<|f(z)|,$$

则$f(z)$与$f(z)+g(z)$在C内有相同的零点数.

证. 显而易见在C上$f(z)$与$f(z)+g(z)$都不等于0，令N及N'各为$f(z)$与$f(z)+g(z)$在C内的零点数，则

$$2\pi N=\Delta_c \arg f.$$

$$2\pi N'=\Delta_c \arg(f+g)=\Delta_c \arg f+\Delta_c \arg\left(1+\frac{g}{f}\right).$$

命

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}.$$

待证

$$\frac{f(z) + g(z)}{f(z)} = 1 + \varphi(z)$$

的零点与极点个数相等．即待证

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\varphi'}{1+\varphi}\, dz = 0.$$

由于 $|\varphi| < 1$，把上式展开成 φ 的幂级数，逐项积分，即得所证．

§ 10. 代数方程的根

定理 1（代数基本定理）．任一 n 次的多项式有 n 个根．

证．令

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

取

$$g(z) = -(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}),$$

取一个以原点为中心，R 为半径的圆，当 R 充分大时

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1.$$

故由 Rouché 定理推得．

此定理也可由 Liouville 定理推出．如果 $f(z)$ 无根，则 $\frac{1}{f(z)}$ 解析，但当 $z\to\infty$ 时 $\frac{1}{f(z)} \to 0$，故它是一常数．因此 $f(z) = 0$ 至少有一根，因而推出有 n 个根．

上节的结果可以用来研究方程式的复根．

例．方程式

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$$

的根分布在哪几个象限内？

首先证明这方程式无实根：由逐步凑方法

$$x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^4 + \frac{29}{8}x^2 + \frac{31}{16}x + \left(3 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{4}\right)^4 + \frac{29}{8}\left(x + \frac{31}{4\cdot 29}\right)^2 + 3 - \frac{1}{4^4} - \frac{31^2}{8\cdot 4^2\cdot 29} > 0$$

可证．

又此式无纯虚根，此乃显然，因为

$$y^4 - iy^3 - 4y^2 + 2iy + 3 = 0$$

无根．

围绕 $|z| = R$（R 充分大）过第一象限求

$$\Delta \arg(z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3).$$

沿实轴变化为 0，在圆弧 $z = Re^{i\theta}$ 上

$$\Delta \arg(z^4+\cdots)=\Delta \arg(R^4e^{4i\theta})+\Delta \arg[1+O(R^{-1})]=2\pi+O(R^{-1}).$$
及沿 y 轴

$$\arg(z^4+\cdots)=\operatorname{arctg}\frac{-y^3+2y}{y^4-4y^2+3},$$

当 $y=\sqrt{2}$ 时,分子为 0, 当 $y=\sqrt{3}$ 及 $y=1$ 时分母为 0; 当 y 从∞到 0 时有理函数 $(-y^3+2y)/(y^4-4y^2+3)$ 的变化如下:

$$y=\infty,\sqrt{3},\sqrt{2},1,0.$$
$$(-y^3+2y)/(y^4-4y^2+3)=0,-,\infty,+,0,-,\infty,+,0,$$
则沿 y 轴

$$\Delta \arg(z^4+\cdots)=-2\pi.$$
故第一象限上 $\arg(z^4+\cdots)$ 的变化等于 0.

即在第一象限内该方程式无根,由于共轭性在第四象限内也无根. 而在第二,第三两象限内各有二根.

习题. 求在各象限内,方程式

$$z^6+6z+10=0$$
的根数.

§11. 级 数 求 和

有时可用围道积分来求级数

$$\sum f(n)$$
之和.

假定 C 是一围道,包有点 $m, m+1, \cdots, n$, 而且 $f(z)$ 在 C 上及 C 内解析. 但可能有有限个单极点 $a_1, \cdots, a_k$ (与 $m, m+1, \cdots, n$ 不同),其留数各为 $r_1, \cdots, r_k$.

考虑

$$\int_c \pi\cdot f(z)\cdot \operatorname{ctg}\pi z dz.$$
函数 $\pi \operatorname{ctg}\pi z$ 在 C 内有单极点 $z=m, m+1,\cdots,n$, 而且留数都是 1, 故函数 $\pi f(z)\operatorname{ctg}\pi z$ 在这些点的留数各等于 $f(m), \cdots, f(n)$, 因此

$$\int_c \pi\cdot f(z)\cdot \operatorname{ctg}\pi z dz=2\pi i\{f(m)+f(m+1)+\cdots$$
$$+f(n)+r_1\pi \operatorname{ctg}\pi a_1+\cdots+r_k\pi\operatorname{ctg}\pi a_k\}.$$

例如: $f(z)$ 是有理函数, 整数非其极点, 而且当 $z\to\infty$ 时, $f(z)=O(|z|^{-1})$. 取 C 为顶点在 $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm1\pm i)$ 的正方形. 不难证明当 $n\to\infty$ 时沿围道 C 的积分趋于 0, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-n}^{n} f(m)=-\pi(r_1\operatorname{ctg}\pi a_1+\cdots+r_k\operatorname{ctg}\pi a_k).$$

取

$$f(z)=\frac{1}{(a+z)^2},$$

它在 $z=-a$ 有一二重极点，由 Taylor 展式，

$$\operatorname{ctg}\pi z=\operatorname{ctg}(-\pi a)+\pi(z+a)\{-\csc^2(-\pi a)\}+\cdots,$$

故 $\operatorname{ctg}\pi z/(z+a)^2$ 在 $z=-a$ 处的留数等于 $-\pi\csc^2\pi a$. 因此

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2}=\pi^2\csc^2\pi a.$$

§12. 常系数线性微分方程

令

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=P(z)$$

表一 n 次多项式．考虑积分

$$u(t)=\int_c\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}dz.$$

这儿 t 是实变数，$f(z)$ 是一次数不高于 n 的多项式，C 是一有界围道不经过 $P(z)$ 的零点.

在积分号下求微分得:

$$\frac{d^lu}{dt^l}=\int_c\frac{e^{tz}f(z)z^l}{P(z)}dz.$$

因此由 Cauchy 定理

$$\sum_{l=0}^{n}a_l\frac{d^lu}{dt^l}=\int_c e^{tz}f(z)dz=0.$$

即 $u(t)$ 是线性微分方程

$$\sum_{l=0}^{n}a_l\frac{d^lu}{dt^l}=0\qquad(1)$$

的解答.

由于 $f(z)$ 是任意的 $n-1$ 次多项式，其中有 n 个系数，因此可以盼望这个方法给出线性方程 (1) 的最一般的解.

取 C 包有 $P(z)$ 所有的零点，我们可以用求留数法得出解答来，例如 $P(z)$ 的根各不相等，它们是: $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则

$$\int_c\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\lim_{z\to\alpha j}\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}(z-\alpha_j)=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\alpha_jt}f(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}.$$

可以取 $f(z)$ 使 $2\pi i\dfrac{f(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}$ 是已给的任意常数 C_j, 因此得

$$u(t)=\sum_{j=1}^{n}C_je^{\alpha_jt}.$$

如果 $z=\alpha_s$ 是 $P(z)$ 的 r 重根，则对应的积分函数有一 r 重的极点．此点的留数可以由

$$e^{tz}f(z) = e^{t\alpha_\nu} \cdot e^{t(z-\alpha_\nu)}f(z)$$
的 $z-a_\nu$ 的幂级数中 $(z-\alpha_\nu)^{r-1}$ 的系数来决定，即

$$e^{t\alpha_\nu}\left(\sum_{l=0}^{r-1} \frac{t^l}{l!} d_{r-1-l}\right).$$

这儿

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l(z-\alpha_\nu)^l.$$

因此推得

$$e^{t\alpha_\nu},\ te^{t\alpha_\nu},\ \cdots,\ t^{r-1}e^{t\alpha_\nu}$$

是解.

习题. 用此法考虑常系数的一阶线性微分方程组.

§ 13. Bürmann, Lagrange 公式

本节的目的在于按一给定的函数的幂展成的级数来表达他一函数. 为了简单起见，有些收敛性问题，我们将不加证明.

令

$$w = \varphi(z) \tag{1}$$

表一单叶变换，把 z 平面上一围道 γ 及其中之点一一对应地变为 w 平面上的一个围道 s 及其中之点. 假定 $\varphi(z)$ 及在 γ 上及 γ 内解析，假定 a 是 γ 的内点，而 $b=\varphi(a)$ 是 s 的内点，当 $z=\zeta$ 过围道 γ 时，$w=\eta$ 过 s.

由于 (1) 是单叶的，所以在 γ 内 $\varphi'(z) \neq 0$，现假定 $\varphi'(z)$ 在 γ 上亦不等于 0，并假设 $f(z)$ 是在 γ 上及 γ 内解析的函数，则 $f'(z)/\varphi'(z)$ 在 γ 上及 γ 内是解析函数，作为 w 的函数看在 s 上及 s 内也是 w 的解析函数. 因此由 Cauchy 积分公式

$$\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \frac{d\eta}{\eta - w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}d\zeta, \tag{2}$$

展开

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(\zeta)-b}\left(1-\frac{\varphi(z)-b}{\varphi(\zeta)-b}\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\varphi(z)-b)^m}{(\varphi(\zeta)-b)^{m+1}}.$$

(关于这级数的收敛性这儿不加讨论.) 因此

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\zeta)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\varphi(z)-b]^m}{[\varphi(\zeta)-b]^{m+1}}d\zeta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}[\varphi(z)-b]^m \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\zeta)\frac{d\zeta}{[\varphi(\zeta)-b]^{m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}[\varphi(z)-b]^m \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}\left[\frac{\zeta-a}{\varphi(\zeta)-b}\right]^{m+1}d\zeta. \end{aligned} \tag{3}$$

由于 $\varphi(z)$ 是单叶的，因此 $\varphi(\zeta)=b$ 除去 $\zeta=a$ 外无它根，即 $\dfrac{\zeta-a}{\varphi(\zeta)-b}$ 在 γ 中解析，

把

$$f'(z)[\psi(z)]^{m+1}, \quad \left(\psi(z) = \frac{z-a}{\varphi(z)-b}\right)$$

展开成为 $z-a$ 的幂级数,其 $(z-a)^m$ 的系数等于

$$\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}[f'(z)(\psi(z))^{m+1}]_{z=a},$$

简书之为

$$\frac{1}{m!}\frac{d^m}{da^m}[f'(a)(\psi(a))^{m+1}].$$

由 (3) 得出

$$f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{d^m}{da^m}[f'(a)(\psi(a))^{m+1}][\varphi(z)-b]^m\varphi'(z).$$

由 a 到 z 求积分得 Bürmann 公式

$$f(z) = f(a) + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^m}{da^m}[f'(a)(\psi(a))^{m+1}][\varphi(z)-b]^{m+1}. \tag{4}$$

取特例

$$w = \frac{z-a}{\tau(z)}, \quad b = 0,$$

则

$$\psi(z) = \tau(z).$$

由 (4) 得 Lagrange 公式

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{f'(a)[\tau(a)]^n\}. \tag{5}$$

(能否由 (5) 推出 (4) 来?) 读者试自己证明: (5) 式成立的条件是 $\frac{z-a}{\tau(z)}$ 在一包有 a 点附近解析,且在 a 点的导数不为 0,则任一在 a 点附近的解析的函数 $f(z)$ 可以在 a 的充分小邻域内表为 (5) 式.

例 1. 方程式

$$z - a - \frac{w}{z} = 0, \quad a \neq 0$$

得出的展开式

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!a^{2n-1}}w^n.$$

这公式说明二次方程

$$z^2 - az - w = 0$$

的解 z 可以由此方程的系数,特别是常数项的幂级数表之. 这公式并不新鲜: 解二次方程得出

$$z = \frac{a}{2}\left[1 \pm \left(1 + \frac{4w}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

由二项式定理,展开上式即得. 因此直接得出的收敛范围是

$$\left|\frac{4w}{a^2}\right| < 1.$$

例 2. 如果 z 是

$$z = 1 + wz^2$$

的一根，当 $w \to 0$，它 $\to 1$，则 $|w| < \frac{1}{4}$ 时，

$$z^n = 1 + nw + \frac{n(n+3)}{2!}w^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!}w^3$$

$$+ \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!}w^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{5!}w^5 + \cdots.$$

例 3. 如果 z 是

$$z = 1 + wz^a$$

的一根，且当 $w \to 0$，它 $\to 1$，则

$$\log z = w + \frac{2\alpha - 1}{2}w^2 + \frac{(3\alpha-1)(3\alpha-2)}{2 \cdot 3}w^3 + \cdots,$$

并且当

$$|w| < |(\alpha-1)^{\alpha-1} \cdot \alpha^{-\alpha}|$$

时此式成立.

附记. Kepler 方程

$$z - a = w \sin z$$

就是 Lagrange 方程的特例. Kepler 方程在天文上有用，本节的方法提供了解 Kepler 方程的具体解法(参阅一卷一分册第六章 § 1).

§ 14. Poisson-Jensen 公式

令 $f(z)$ 表一函数，在圆 $|z| \leqslant R$ 内有 m 个零点 $a_1, \cdots, a_m$ 及 n 个极点 $b_1, \cdots b_n$，除这些极点外在 $|z| \leqslant R$ 上解析 (p 重零点或极点写 p 次)，则有如下的

Poisson-Jensen 公式

$$\log |f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} \log |f(Re^{i\phi})| d\phi$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m} \log \left|\frac{R^2 - \bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - a_\mu)}\right| + \sum_{\nu=1}^{n} \log \left|\frac{R^2 - \bar{b}_\nu e^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - b_\nu)}\right|. \tag{1}$$

证.

1) 如果 $f(z)$ 无零点与极点，则 $\log f(z)$ 是 $|z| \leqslant R$ 上的解析函数. 公式(1)就是 Poisson 公式.

2) 命

$$g(z) = f(z) \frac{\prod \frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu z}}{\prod \frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z}},$$

在 $|z|\leqslant R$ 上 $g(z)$ 既无零点又无极点．在 $|z|=R$ 上除有限个点外

$$|g(z)|=|f(z)|.$$

由 1) 可知

$$\log|g(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\log|g(Re^{i\phi})|d\phi,$$

即得

$$\log|f(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\log|f(Re^{i\phi})|d\phi$$

$$-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_\mu)}\right|+\sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-b_\nu)}\right|.$$

当 $a_\mu\neq 0$, $b_\nu\neq 0$ 时，命 $r=0$, 即得

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R}{a_\mu}\right|+\sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R}{b_\nu}\right|,$$

即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi=\log\frac{|f(0)|\left|\prod_{\nu=1}^{n}b_\nu\right|}{\left|\prod_{\mu=1}^{m}a_\mu\right|}R^{m-n}.$$

第八章　最大模原理与函数族

§1. 最大模原理

在第四章中已经提起过最大模原理：在一域D内如果$f(z)$是单值的有则的，则它的绝对值，它的实部，它的虚部都不能在D的内点取最大值. 唯一的例外是$f(z)$常数.

我们先减弱一些条件；即使$f(z)$非单值的，但$|f(z)|$是单值的，仍然是在D的内点$|f(z)|$不能取最大值(除$f(z)$等于常数外).

这样的推广是无须乎证明的，因为对每一分支来说，$f(z)$是一单值函数，以上的定理是正确的，由于$|f(z)|$是单值的，所以得出这一推广的结论来.

命$M(r)$表示$|f(z)|$在圆周$|z|=r$上的最大值，由最大模原理立刻得出$M(r)$是递增函数，并且除$f(z)$是一常数外，$M(r)$是严格的增函数，即如果$r<r'$，则$M(r)<M(r')$.

命$A(r)$表$\mathbf{R}f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大值，则$A(r)$也是严格增函数.

关于$M(r)$与$A(r)$之间有以下的不等式.

定理 1 (Borel, Carathéodory). 假定$f(z)$在圆$|z|\leqslant R$内有则，则当$0<r<R$时有

$$M(r)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

当$f(z)$是常数时，此式显然正确. 假定$f(z)$非常数，并且假定$f(0)=0$，由$A(r)$的递增性可知$A(R)>A(0)=0$.

命

$$\phi(z)=\frac{f(z)}{2A(R)-f(z)},$$

在$|z|\leqslant r$中，$\phi(z)$是有则的，因为其分母的实数部分$\neq 0$. 命$f(z)=u+iv$，则

$$|\phi(z)|^2=\frac{u^2+v^2}{(2A(R)-u)^2+v^2}\leqslant 1.$$

(由于$-2A(R)+u\leqslant u\leqslant 2A(R)-u$.) 由 Schwarz 引理

$$|\phi(z)|\leqslant\frac{r}{R},$$

因此

$$|f(z)|=\left|\frac{2A(R)\phi(z)}{1+\phi(z)}\right|\leqslant\frac{2A(R)r}{R-r},$$

即得所证.

如果$f(0)\neq 0$，则把上结果用到$f(z)-f(0)$上，得

$$|f(z)-f(0)|\leqslant\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}\mathbf{R}(f(z)-f(0))\leqslant\frac{2r}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\},$$

即得所证.

立刻推得

定理 2. 如果 $A(R) \geqslant 0$，则

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

定理 3. 如果 $A(R) \geqslant 0$，则

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+2} n!\, R}{(R-r)^{n+1}}(A(R)+|f(0)|).$$

证. 由

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw,$$

此 c 是一以 $w=z$ 为心，$\delta=\frac{1}{2}(R-r)$ 为半径的圆，在此圆上

$$|w| \leqslant r+\frac{1}{2}(R-r)=\frac{1}{2}(R+r),$$

故由 Carathéodory 不等式

$$\max|f(w)| \leqslant \frac{R+\frac{1}{2}(R+r)}{R-\frac{1}{2}(R+r)}(A(R)+|f(0)|)$$

$$<\frac{4R}{R-r}(A(R)+|f(0)|),$$

因此

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{\delta^n}\frac{4R}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\}=\frac{2^{n+2}n!\,R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

§2. Phragmen-Lindelöf 定理

定理 1. 假定 (i) $f(z)$ 在一有界域 D 上有则，而且 $|f(z)|$ 是单值的，(ii) 对任一 $\varepsilon>0$，在每一周界点 ζ 的某一内邻域内

$$|f(z)|<M+\varepsilon, \tag{1}$$

则对每一内点常有 $|f(z)| \leqslant M$，而且如果有内点取等号，则 $f(z)$ 是常数.

证. 命 G 表示 $|f(z)|$ 在 D 内的上确界(并不排斥 $G=\infty$)，由上确界的定义，有一批内点 z_n 使 $|f(z_n)| \to G$，命 z_0 是其一极限点，并且不妨假定 $z_k \to z_0$.

1) 假定 z_0 是内点，则由 $|f(z)|$ 的连续性可知

$$\lim_{k\to\infty}|f(z_k)|=|f(z_0)|=G,$$

即 $|f(z)|$ 在一内点取最大值，即 $f(z)$ 是一常数.

2) 假定 z_0 是边界点，由 (1)，有一正方形 q，以 z_0 为中心，使 z 在 q 与 D 的公共部分

$$|f(z)|<M+\varepsilon.$$

因为当 k 充分大时，z_k 进入 q，因此 $G \leqslant M+\varepsilon$，由于 ε 是任意小，所以 $G \leqslant M$ 即得

定理的前一部分．取等号的情况就是最大模原理的推论．

§3. Hadamard 三圆定理

定理 1. 命 $f(z)$ 是一解析函数，在环 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$ 内有则，则 $\log M(r)$ 在 $r_1 < r < r_3$ 中是 $\log r$ 的连续凸函数，更明确些，当 $r_1 < r_2 < r_3$ 时，我们有

$$\log M(r_2) \leqslant \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_3).$$

把 $M(r_i)$ 写成为 M_i，则

$$M_2^{\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)} \leqslant M_1^{\log\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} M_3^{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

证．命

$$\phi(z) = z^{\lambda} f(z),$$

这儿 λ 是一常数，以后再取定．在环中 $\phi(z)$ 是有则的，而且 $|\phi(z)|$ 是单值的．由最大模原理，

$$|\phi(z)| \leqslant \max(r_1^{\lambda} M_1,\ r_3^{\lambda} M_3),$$

特别在 $|z| = r_2$ 上，

$$|f(z)| \leqslant \max\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\lambda} M_1,\ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\lambda} M_3\right],$$

取

$$\lambda = -\{\log M_3/M_1\}/\log(r_3/r_1),$$

即得所证．（读者试答，为什么取此 λ 值？）

注意．仅当 $\phi(z)$ 是常数时取等号，即 $f(z) = cz^{\mu}$ 时，取等号．

§4. 关于 $|f(z)|$ 均值的 Hardy 定理

定理 1. 假定 $f(z)$ 在圆 $|z| < R$ 内有则，命

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

则 $I_2(r)$ 是 r 的严格增函数，而且 $\log I_2(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数 $(0 < r < R)$.

证．命

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

则

$$I_2(r) = \sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

除 $f(z) = a_0$ 以外，$I_2(r)$ 显然是严格递增函数，命 $u = \log r$，则

$$\frac{d^2}{du^2} \log I_2 = \frac{I_2 I_2'' - (I_2')^2}{I_2^2},$$

这儿 I_2', I_2'' 表示 I_2 对 u 的微商，由 Schwarz 不等式

$$I_2'^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2(2n)e^{2nu}\right)^2 \leqslant (\Sigma|a_n|^2e^{2nu})(\Sigma|a_n|^2 4n^2e^{2nu}) = I_2 I_2'',$$

即得

$$\frac{d^2}{du^2}\log I_2 \geqslant 0.$$

即得所证.（读者试答,何时取等号?）

定理 2. 假定 $f(z)$ 在圆 $|z| < R$ 内有则,命

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

则 $I_1(r)$ 是 r 的严格增函数, $\log I_1(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数 $(0 < r < R)$.

证. 命 $0 < r_1 < r_2 < r_3$, 且定义

$$k(\theta) = |f(r_2e^{i\theta})|/f(r_2e^{i\theta}),$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})k(\theta)d\theta,$$

$F(z)$ 在 $|z| \leqslant r_3$ 上有则,而且在此圆上一点 $z = r_3e^{i\lambda}$ 取最大值,故

$$I_1(r_2) = F(r_2) \leqslant |F(r_3e^{i\lambda})| \leqslant I_1(r_3),$$

取 α 使

$$r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3),$$

因此

$$r_2^\alpha I_1(r_2) = r_2^\alpha F(r_2) \leqslant \max_{r_1\leqslant|z|\leqslant r_3}|z^\alpha F(z)| \leqslant r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3).$$

因此,如三圆定理的证法,立得本定理.

附记 1. 定理 1 是定理 2 的容易推论.

附记 2. 当 $f(z) = \lambda z^\alpha$ 时取等号.

附记 3. 如果 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内无零点, 则 $(f(re^{i\theta}))^p$ 在 $|z| < R$ 内也是有则的,因此由定理 2 推得

$$I_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad p > 0$$

是 r 的增函数, $\log I_p(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数 $(0 < r < R)$. 以下几节的目的在于证明,在有零点的条件下这些性质也正确.

§5. 引　理

定理 1. 若干个解析函数的绝对值的和, 也是在边界上取最大值. 更确切些, 命 $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ 在 D 内及其周界上是有则的,是单值的,则连续函数

$$\varphi(z) = |f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|$$

仅在 D 的边界上取最大值. 如果在 D 内部取最大值,则 $f_\nu(z)$ 全是常数.

证. 命 z_0 是 D 一内点,则

$$|f_\nu(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_\nu(z_0+re^{i\theta})|d\theta, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

因此

$$\varphi(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

如果有一 f_ν 取不等式,则 φ 取不等式,与最大值原理同法得本定理.

定理 2. 假定 $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ 在D内及其周界上有则,而且是单值的. 假定 $p_1, \cdots, p_n$ 是正数,则连续函数

$$\varphi(z) = |f_1(z)|^{p_1} + \cdots + |f_n(z)|^{p_n}$$

仅在D的边界上取最大值. 如在D内取最大值,则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 全是常数.

证. 假定 z_0 是一内点,可取 r 使圆 $|z - z_0| \leqslant r$ 完全在D内,在此圆内除 z_0 以外, $f_1, \cdots, f_n$ 无零点. 假定 $f_\nu(z_0) = 0$ 而 $f_\mu(z_0) \neq 0$, 则 $(f_\mu(z_0))^{p_\mu}$ 在 $|z - z_0| \leqslant r$ 内有则. 由定理 1 可知在圆周 $|z - z_0| = r$ 上有一点 z_1 使

$$\sum_\mu |f_\mu(z_1)|^{p_\mu} \geqslant \sum_\mu |f_\mu(z_0)|^{p_\mu},$$

并且显然有

$$\sum_\nu |f_\nu(z_1)|^{p_\nu} \geqslant 0 = \sum_\nu |f_\nu(z_0)|^{p_\nu}.$$

因此 $\varphi(z_1) \geqslant \varphi(z_0)$. 更确切些,在 $f_\mu(z)$ 与 $f_\nu(z)$ 中有一个不恒为常数,则 $\varphi(z_1) > \varphi(z_0)$.

D 及其边界是一闭集合,一定有一点,在此点连续函数 $\varphi(z)$ 取最大值,此点不能是内点(除 $f_\nu(z)$ 都是常数外).

附记. 如果我们仅假设 $f_m(z)$ 有则, $|f_m(z)|$ 是单值,定理仍然正确.

§6. 一般均值定理

定理 1 (Pólya-Szegö). 假定 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内有则, $p > 0$, 而且

$$I_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad r < R,$$

则 $I_p(r)$ 是 r 的增函数, $\log I_p(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

证. 1) 增函数. 命 $\omega_\nu = e^{2\pi i\nu/n}$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, 命 $0 \leqslant r_1 < r_2 < R$, 由上节定理 2 可知在圆周 $|z| = r_2$ 上有一点 $r_2 e^{i\theta_2}$, 使

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n |f(r_1\omega_\nu)|^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n |f(r_2\omega_\nu e^{i\theta_2})|^p,$$

当 $n \to \infty$ 时,则

$$I_p(r_1) \leqslant I_p(r_2).$$

2) 凸性. 命 $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$, α 实数,则函数

$$z^{\frac{\alpha}{p}}f(\omega_1 z),\ z^{\frac{\alpha}{p}}f(\omega_2 z),\ \cdots,\ z^{\frac{\alpha}{p}}f(\omega_n z)$$

都在环 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$ 内有则,而且其绝对值是单值的,由上节的结果

$$r_2^\alpha \sum_{\nu=1}^n |f(r_2\omega_\nu)|^p \leqslant \max_{\substack{0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\theta_3\leqslant 2\pi}} \left(r_1^\alpha \sum_{\nu=1}^n |f(r_1 e^{i\theta_1}\omega_\nu)|^p,\ r_3^\alpha \sum_{\nu=1}^n |f(r_3 e^{i\theta_3}\omega_\nu)|^p\right)$$

除以 $\frac{1}{n}$ 而且命 $n\to\infty$，则得

$$r_2^{\alpha}I_p(r_2)\leqslant \max\left(r_1^{\alpha}I_p(r_1),\ r_3^{\alpha}I_p(r_3)\right).$$

取 α 使

$$r_1^{\alpha}I_p(r_1)=r_3^{\alpha}I_p(r_3),$$

即得所证.

§ 7. $(I_p(r))^{\frac{1}{p}}$

由 § 6 的定理显然可以推出 § 4 的定理 1 与定理 2. 命

$$G(r)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right).$$

(定义为几何平均.)

定理 1. $\lim\limits_{p\to+0}(I_p(r))^{\frac{1}{p}}=G(r).$

证. 我们有

$$\begin{aligned}I_p(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{p\log|f|}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1+p\log|f|+O(p^2(\log|f|)^2)]d\theta\\&=1+\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+O(p^2),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+0}\frac{1}{p}\log I_p(r)&=\lim\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f|d\theta+O(p^2)\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\log G(r),\end{aligned}$$

即得所求.

因此推得

定理 2. $G(r)$ 是 r 的增函数, $\log G(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

定理 3.

$$\lim_{p\to\infty}(I_p(r))^{\frac{1}{p}}=M(r).$$

证. 显然有

$$(I_p(r))^{\frac{1}{p}}\leqslant M(r).$$

命 $re^{i\theta_1}$ 是一点使 $|f(re^{i\theta_1})|=M(r)$，则有一邻域 $|\theta-\theta_1|<\frac{\delta}{2}$ 存在,使其中

$$|f(re^{i\theta})|>M(r)-\varepsilon,$$

此处 ε 是一个任给的正数,因此

$$(I_p(r))^{\frac{1}{p}}\geqslant(M(r)-\varepsilon)(\delta)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\lim_{p\to\infty}(I_p(r))^{\frac{1}{p}} \geqslant M(r)-\varepsilon.$$

这证明了定理 3.

由此可见 Pólya-Szegö 定理还包含了 Hadamard 三圆定理.

§8. Vitali 定 理

定理 1. 命 $f_n(z)$ 是一个函数贯, $n=1, 2, \cdots$, 它们在域D内单值且解析,而且对每一n及D中每一点z常有

$$|f_n(z)| \leqslant M. \tag{1}$$

这M与n及z都无关系. 假定D内有一点集E, 在其上的任一点z, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ 存在,如E有一极限点是D的内点,则在D内的任一紧致子集上, $f_n(z)$ 一致收敛于一函数, 这函数当然在D内是z的解析的函数.

证. 先假定D是以原点为中心, R为半径的圆,并且假定

$$z_1, z_2, \cdots \to 0,$$

而且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_\nu), \quad \nu=1, 2, \cdots$$

存在, 明确地说 $f_n(z)$ 适合于: (i) $f_n(z)$ 在 $|z|<R$ 内有则且单值, (ii) 在 $|z|<R$ 内 $|f_n(z)|<M$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_\nu)$ 存在.

命

$$f_1(z)=a_{01}+a_{11}z+a_{21}z^2+\cdots+a_{k1}z^k+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_l(z)=a_{0l}+a_{1l}z+a_{2l}z^2+\cdots+a_{kl}z^k+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

先证明每一行的系数有一极限,即

$$\lim_{l\to\infty} a_{kl}=a_k$$

存在. 再证明 Taylor 级数

$$\Sigma a_k z^k$$

在 $|z|<R$ 内收敛, 故它在 $|z|<R$ 内代表一有则函数 $f(z)$. 最后证明对任一 $\varepsilon>0$, 在 $|z|\leqslant R-\varepsilon$ 内, $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$.

由假定

$$|f_n(z)-f_n(0)| \leqslant |f_n(z)|+|f_n(0)| \leqslant 2M,$$

由 Schwarz 引理

$$|f_n(z)-f_n(0)| \leqslant 2M|z|/R, \quad |z|<R,$$

故

$$|f_n(0)-f_{n+m}(0)| \leqslant |f_n(0)-f_n(z_l)| + |f_n(z_l) - f_{n+m}(z_l)| + |f_{n+m}(z_l)-f_{n+m}(0)|$$
$$\leqslant \frac{4M|z_l|}{R} + |f_n(z_l)-f_{n+m}(z_l)|.$$

由 $z_l \to 0$，及 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_l)$ 的存在性可知，给了 $\varepsilon>0$，可以取得 z_l 使 $\dfrac{4M|z_l|}{R}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，又可以取 N，使 $n>N$ 时 $|f_n(z_l)-f_{n+m}(z_l)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

因此，当 $n>N$ 时

$$|f_n(0)-f_{n+m}(0)|<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} a_{0n}$$

存在，命之为

$$\lim_{n\to\infty} a_{0n} = a_0.$$

再考虑函数

$$f_{\nu 1}(z) = (f_\nu(z) - a_{0\nu})/z = a_{1\nu} + a_{2\nu}z + \cdots, \tag{2}$$

今往证这一函数贯也适合 (i)，(ii)，(iii)，如此则 $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{1\nu}$ 存在.

由于 (2) 的收敛半径是 R，因此 $f_{\nu1}(z)$ 适合条件 (i)，又由 Cauchy 不等式

$$|a_{k\nu}| \leqslant M/R^k, \tag{3}$$

故在 $|z|\leqslant R-\varepsilon$ 内

$$|f_{\nu1}(z)| \leqslant |a_{1\nu}| + |a_{2\nu}||z| + \cdots$$
$$\leqslant M\left(1+\frac{R-\varepsilon}{R}+\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^2+\cdots\right)\Big/R = \frac{M}{\varepsilon}.$$

因此 (ii) 是适合的，但换了在 $|z|\leqslant R-\varepsilon$ 内，$|f_{\nu1}(z)|\leqslant\dfrac{M}{\varepsilon}$. 最后

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{\nu1}(z_l) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{f_\nu(z_l)-a_{0\nu}}{z_l} = \frac{1}{z_l}\left(\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z_l) - a_0\right), \quad z_l\neq 0$$

是存在的，因得所证.

重复这一步骤，推得每一列系数都有极限，

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{k\nu} = a_k, \quad k=1,2,\cdots.$$

由 (3) 可知

$$|a_k| \leqslant M/R^k,$$

因此级数 $\Sigma a_k z^k$ 在 $|z|<R$ 内表有则函数.

最后，当 $|z|\leqslant R-\varepsilon$，

$$|f(z)-f_\nu(z)| \leqslant |(a_0-a_{0\nu}) + \cdots + (a_m - a_{m\nu})z^m| + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{k\nu} z^k\right|,$$

故

$$|f(z)-f_\nu(z)|\leqslant\sum_{\lambda=0}^{m}|a_\lambda-a_{\lambda\nu}||z^\lambda|+\frac{2M}{R^{m+1}}(R-\varepsilon)^{m+1}\frac{R}{\varepsilon}.$$

给一 $\delta>0$，我们可以取 m，

$$\frac{2RM}{\varepsilon}\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^{m+1}<\frac{\delta}{2},$$

然后取 $\nu(\delta, m)$，使 $\nu>\nu(\delta, m)$ 时，$m+1$ 个数

$$|a_0-a_{0\nu}|,\ \cdots,\ |a_m-a_{m\nu}|$$

都小于

$$\frac{\delta}{2}\frac{1-(R-\varepsilon)}{1-(R-\varepsilon)^{m+1}},$$

即得

$$|f(z)-f_\nu(z)|\leqslant\frac{\delta}{2}\frac{1-(R-\varepsilon)}{1-(R-\varepsilon)^{m+1}}\sum_{\lambda=0}^{m}(R-\varepsilon)^\lambda+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

于是 Vitali 定理在圆 $|z|<R$ 中当 $\lim\limits_{\nu\to\infty}z_\nu=z_0=0$ 时正确，即使 $\lim\limits_{\nu\to\infty}z_\nu=z_0\neq0$ 时也是正确的，因为有 Möbius 变换使 $|z|<R$ 不变而把 0 变为 z_0.

现在证明一般性的定理．命 R 是任一由 D 的内点所组成的闭域，在 R 上 $f_\nu(z)$ 处处有则，即对 R 中任一点一定有一个以此点为中心的圆，在其中 $f_\nu(z)$ 是有则的，因此，由 Heine-Borel 定理，其中可以选取有限个(开)圆 $c_1, \cdots, c_p$ 覆盖此域 R.

命 c_1 是其中之一圆，包有 z_ν 的极限点 z_0 者．由以上证得的结果：在 c_1 内的任一闭区域，$f_\nu(z)$ 一致收敛于 $f(z)$，取 c_2 为另一圆与 c_1 有公共部分 K，在 K 内取一点列 $z_1', \cdots, z_n', \cdots$ 以 z_0' 其极限点，z_0' 仍在 K 内，则

$$\lim_{\nu\to\infty}f_\nu(z_l')=f(z_l').$$

故定理能用在 c_2 上，即在 c_2 内，$f_\nu(z)$ 一致收敛于一函数(当 $\nu\to\infty$)．由于在 K 内两极限函数等同，因此后者是前者的解析延拓．用此办法可以达到所有的 p 个圆，即本定理对 R 为真，定理证毕．

§9. 囿函数族

定义． $\{f(z)\}$ 是一个单值函数的集合，其中每一函数都在域 D 内有则，如果有一常数 M，使对族中每一函数 $f(z)$，常有

$$|f(z)|<M,$$

则此族称为囿族．

关于囿族有以下的重要定理．

定理 1 (Montel)．D 上的任何解析函数的囿族，一定在 D 内的任一闭子集上包有一个一致收敛的函数贯，其极限函数是解析函数．

证．取任一以内点 z_0 为极限点的贯

$$z_1, z_2, \cdots,$$

设 $f_\nu(z)$ 构成一个囿族，由于 $|f_\nu(z_1)|<M$，所以可以取一个函数贯

$$f_{\nu 11}(z), f_{\nu 21}(z), \cdots, f_{\nu n1}(z), \cdots,$$

(其中 $\nu_{n1} \geqslant n$) 使

$$f_{\nu 11}(z_1), f_{\nu 21}(z_1), \cdots, f_{\nu n1}(z_1), \cdots$$

的极限存在. 在这一个函数贯中,考虑

$$f_{\nu 11}(z_2), f_{\nu 21}(z_2), \cdots,$$

其中一定有一子贯

$$f_{\nu 12}(z_2), f_{\nu 22}(z_2), \cdots$$

的极限存在,再在这一贯中选取 $\nu_{13}, \nu_{23}, \cdots, \nu_{n3}, \cdots$ 使

$$f_{\nu 13}(z_3), f_{\nu 23}(z_3), \cdots$$

的极限存在,等等,考虑函数贯

$$f_{\nu 11}(z), f_{\nu 22}(z), f_{\nu 33}(z), \cdots.$$

(Hilbert-Cantor 对角线法,参阅五章 § 2.)

这函数贯对任一 $z = z_l$ 都有极限. 由于 z_l 的极限点是D的内点, 因此由 Vitali 定理推出本定理.

这个定理的逆定理是不对的,例如: 函数族

$$\frac{1}{n(z-1)}$$

在单位圆内的任一闭子集上一致收敛于零,但族中每一函数在单位圆内皆不受囿.

附记. 我们还可以从 Montel 定理来推出 Vitali 定理. 如果 $f_n(z)$ 并不收敛, 由 Montel 定理可以选出两个函数贯, 各收敛于一个解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$, 但在 $z_1, \cdots, z_n, \cdots$,

$$f(z) - g(z) = 0,$$

而其极限点 z_0 是内点. 因此 $f(z) \equiv g(z)$.

§ 10. 正 规 族

上节的结果引出了一个重要概念即正规族.

定义 1. 设 $\{f_\nu(z)\}$ 是定义在某一域D上的一族函数,其中 ν 属于某一指标集合.如果对此函数族中的任一子族,一定可以找到包含在此函数族中的一个函数贯 $\{f_n(z)\}_{n=1,2,3,\cdots}$ 使 $\{f_n(z)\}$ 在D内的任一闭子域内一致收敛,其极限函数可以 $\equiv\infty$, 则我们称 $\{f_\nu(z)\}$ 为域D上的一个正规族.

所谓一个函数贯 $\{f_n(z)\}$ 在一点集合E上一致收敛于 ∞, 即任给 $\varepsilon > 0$, 有N存在,使 $n > N$ 时

$$\frac{1}{|f_n(z)|} < \varepsilon$$

对一切的 $z \in E$ 都成立,就是说N与 z 无关.

正规族的极限函数成一集合称为原族的导出集合. 导出集合显然是封闭的, 即导出集合中一致收敛贯的极限函数一定在导出集合中,故一正规族的导出集合是一正规族.

上节的定理可以改述为

任何一个(解析函数的)囿族一定是正规族.

定理 1. 命 $\{f(z)\}$ 是 D 内的正则函数的一个正规族，如果在一点 z_0 有界，则在 D 内任一闭子域 D' 上这族是囿族.

证. 反之,即 $\{f(z)\}$ 在 D' 中不受囿,即在 D' 中有一点 z_1 及一函数 $f_1(z)$ 使

$$|f_1(z_1)| > 1,$$

及一点 z_2 与一函数 $f_2(z)$ 使

$$|f_2(z_2)| > 2,$$

等等. 即一般有一点 z_n 及一函数 $f_n(z)$ 使

$$|f_n(z_n)| > n.$$

研究函数贯

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_n(z),\ \cdots,$$

由假定,其中可以选一子贯，在 D' 中一致收敛于一函数 $f(z)$. 由于在 z_0 点，$f_n(z)$ 收敛，因此 $f(z)$ 不能收敛于 ∞.

所以 $f(z)$ 在 D' 内及其周界上是有则的,因此

$$|f(z)| \leqslant K$$

当 n 充分大时,在 D' 上 $|f_n(z) - f(z)| < 1$，所以

$$|f_n(z)| \leqslant K + 1,\quad z \in D'.$$

这与 $|f_n(z_n)| > n$ 的假定相违背.

第九章　整函数与亚纯函数

§1. 定　　义

在全平面上(不包括∞)无处不解析的函数称为整函数或全纯函数．在全平面上(不包括∞)除去一些孤立极点外，无处不解析的函数称为亚纯函数．

整函数是多项式的推广，而亚纯函数是有理函数的推广．显而易见，二整函数的和、差、积仍然是整函数，亚纯函数的和、差、积、商(分母非零)仍然是亚纯函数．

多项式与有理函数的性质是我们研究整函数与亚纯函数的基础．我们先看一些是多项式与有理函数的基本性质．首先，多项式一定有零点，而且有唯一分解定理(按多项式的根来进行分解)．这一结果能不能推广到整函数?

首先，我们可以举出无零点的整函数，e^z 就无零点．更一般些，对任一整函数 $g(z)$，$e^{g(z)}$ 是无零点的整函数．反之，如果 $f(z)$ 是一个没有一个零点的整函数，则 $\log f(z)=g(z)$ 当然也是整函数．因此，整函数 $f(z)$ 无零点的必要且充分条件是它可以表成为 $e^{g(z)}$，这儿 $g(z)$ 是整函数．其次，更一般些，对任意复数 a (不包括 ∞)，由 n 次多项式 $p(z)$ 做出的方程式

$$p(z)=a$$

常有解(并且常有 n 个解)．由任一整函数 $f(z)$ 做出的方程式

$$f(z)=a \tag{1}$$

对那些 a 有解? 关于此问题有著名的 Picard 定理：可能存在有一个数值 a_0，除 $a=a_0$ 外，(1) 常有解(不包括 $a=\infty$)．Picard 的原证非常有趣，但他用到了一个椭圆模函数 $\omega(z)$．这函数有下列性质：除 $z=0,1,\infty$ 以外，这函数(非常数)无处不有则，其虚数部分决不为负．如果 $f(z)=a$，$f(z)=b$ 都无解，作

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{b-a},$$

则 $g(z)=0$，$g(z)=1$ 无解．作函数

$$e^{i\omega(g(z))},$$

因为 $g(z)\neq 0,\neq 1$，所以 $\omega(g(z))$ 除 $z=\infty$ 外无处不解析，由于 $\omega(z)$ 的虚数部分不为负，所以

$$|e^{i\omega(g(z))}|\leqslant 1.$$

$e^{i\omega(g(z))}$ 是有界整函数，由 Liouville 定理，它是一常数，即 $\omega(g(z))$ 是常数，但 ω 非常数，因此 $g(z)$ 是常数．

其三，多项式分解定理有无推广．如果 $f(z)$ 有有限个零点 $a_1,\cdots,a_n$，则不难证明

$$f(z)=\prod_{\nu=0}^{n}(z-a_\nu)e^{g(z)},$$

这儿 $g(z)$ 是整函数．如果有无穷多个零点，就出现了无穷乘积

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) \tag{2}$$

是否收敛的问题，如果要求它收敛，就必须要求级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$$

收敛．换言之，如果给了 n 个任意复数，我们可以作出以此为根的多项式，但任意给了无穷个 $a_1, a_2, \cdots, a_\nu, \cdots$，我们不能由 (2) 法做出以此为零点的表达式 (2)． 但我们却能够做出以此为零点的整函数．如果点集 $\{a_\nu\}$ 在有限平面上没有聚点，则所作出的整函数亦不恒等于 0．这将是本章要讲到的 Weierstrass 定理．

关于亚纯函数，第一个问题是：它是否可以表为二整函数之商． 这是容易证明的事实．如果 $f(z)$ 是亚纯函数，其极点是

$$z_1, z_2, \cdots, z_\nu, \cdots$$

重根作重数写出．由 Weierstrass 定理，我们可以做一个整函数 $g(z)$，以 $z_1, z_2, \cdots, z_\nu, \cdots$ 为零点，因此 $g(z)f(z)$ 是整函数 $h(z)$，因此 $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$.

最后，有理函数有分项分数法，这一结果的推广将是本章所要讲的 Mittag-Leffler 定理．如果说 Weierstrass 定理是用事先给定的零点分布构造整函数，则 Mittag-Leffler 定理是用事先给定的极点分布构造亚纯函数．

§2. Weierstrass 分解定理

命 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个仅以∞为其聚点的复数贯，其中同一数可能出现有限次，则存在一个不恒为 0 的整函数以此为零点．

假定其中有 l 个等于 0，把其他的 a_i 排成为

$$0<|a_{l+1}|\leqslant|a_{l+2}|\leqslant\cdots,$$

命 $|a_n|=r_n$．我们先证明有一个正整数贯

$$p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots$$

存在，使级数

$$\sum_{n=l+1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n} \tag{1}$$

对任一 r 收敛．我们证明 $p_n=n$ 即有此性质．由于 $r_n\to\infty$，所以当 $r_n>2r$ 时

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n<\frac{1}{2^n}.$$

因此 (1) 一定收敛(读者试证明 $p_n>\log n$ 即有此性质)．

定义． 函数

$$E(u,p)=(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\cdots+\frac{1}{p}u^p},\quad p=1,2,\cdots,n,\cdots,$$
$$E(u,0)=(1-u),$$

称为原因子．

当 $|u|<1$ 时，

$$\log E(u,p)=-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\frac{u^{p+2}}{p+2}-\cdots\cdots.$$

故当 $|u|<\frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}|\log E(u,p)| &\leqslant |u|^{p+1}+|u|^{p+2}+\cdots\\ &\leqslant |u|^{p+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right\}=2|u|^{p+1}.\end{aligned}\tag{2}$$

作无穷乘积

$$f(z)=z^l\prod_{n=l+1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},\ p_n-1\right).$$

由不等式(2)，可知当 $|a_n|>2|z|$ 时，

$$\left|\log E\left(\frac{z}{a_n},\ p_n-1\right)\right|\leqslant 2\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}.$$

因此，在 $|z|\leqslant R$ 中，级数

$$\sum_{|a_n|>2R}\left|\log E\left(\frac{z}{a_n},\ p_n-1\right)\right|\leqslant 2\sum\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}$$

一致收敛．即乘积

$$\prod_{|a_n|>2R}E\left(\frac{z}{a_n},\ p_n-1\right)$$

一致收敛，因此，它在 $|z|\leqslant R$ 中是解析的，而

$$z^l\prod_{|a_n|\leqslant 2R,\ n>l}E\left(\frac{z}{a_n},\ p_n-1\right)\tag{3}$$

显然是 z 的解析函数．因此，$f(z)$ 是解析的，而且在 $|z|\leqslant R$ 中以(3)式的零点为零点．

由于 R 可以任意大，我们找到了以 $a_1,a_2,\cdots$ 为零点的整函数．

注意除此之外，无其它零点．(因无穷乘积收敛的意义包括其极限不为0.)

但必须注意分解不是唯一的，可能相差一个无零点的整函数因子．

§3. 整函数的阶

如果有正数 $A>0$，使 $|z|=r\to\infty$ 时

$$f(z)=O(e^{r^A}),$$

则整函数 $f(z)$ 称为有限阶的函数．A 的下确界 ρ 称为这函数的**阶**，也就是对任一 $\varepsilon>0$

$$f(z)=O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}),\tag{1}$$

而对任一 $\varepsilon<0$，此式不能成立．

命 $M(r)$ 表示在 $|z|=r$ 上 $|f(z)|$ 的最大值，则(1)等价于

$$\rho=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

例1. e^z 与 $\sin z$，$\cos z$ 都是一阶整函数．

例 2. $\cos\sqrt{z}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶整函数.

例 3. e^{e^z} 是无穷阶整函数.

为了减少一些非本质的麻烦，今后我们假定 $f(0)\neq 0$，不然我们可以考虑 $\frac{1}{z^h}f(z)$，阶并不受影响.

定义. 设 a_n 为 $f(z)$ 的零点，命 $|a_n|=r_n$ 及 $r_1\leqslant r_2\leqslant r_3\leqslant\cdots$，如果 ρ_1 是使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\rho}}$$

收敛的 ρ 的下确界，则 ρ_1 称为 $f(z)$ 的零点的收敛指数.

定理 1. 一个 ρ 阶的整函数的收敛指数 $\leqslant\rho$，即 $\rho_1\leqslant\rho$.

证. 由 Jensen 公式可知，当 $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}$ 时

$$\log\frac{r^n}{r_1\cdots r_n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\log|f(0)|=O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

命 $n(r)$ 表示不大于 r 的 r_n 的个数，则显然有

$$\log\frac{r^n}{r_1\cdots r_n}=\sum_{i=1}^{n}\log\frac{r}{r_i}\geqslant\sum_{r_i\leqslant\frac{1}{2}r}\log\frac{r}{r_i}\geqslant n\left(\frac{r}{2}\right)\log 2.$$

由此推出

$$n\left(\frac{r}{2}\right)=O(r^{\rho+\varepsilon}),\quad 即\ n(r)=O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

取 $r=r_n$，则得

$$n=O(r_n^{\rho+\varepsilon}),$$

即

$$\frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

由于 $\Sigma\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<\infty$，所以对任一 $\varepsilon>0$，

$$\Sigma\frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

常收敛，定理证明.

由此得出有限阶整函数的重要性质，即有一正整数 p 与 n 无关，乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p\right) \tag{2}$$

对所有的 z 收敛，其中 z_n 是该整函数的零点.

最小的正整数 p 使 (2) 收敛者称为亏格 (genus)，如果 ρ_1 非整数，则 $p=[\rho_1]$；如果 ρ_1 是整数，则

$$p=\begin{cases}\rho_1, & 如果\ \Sigma r_n^{-\rho_1}\ 发散,\\ \rho_1-1, & 如果\ \Sigma r_n^{-\rho_1}\ 收敛.\end{cases}$$

无论如何

$$p\leqslant\rho_1\leqslant\rho.$$

定理 2. 任意给定一趋于无穷的点列 z_n，每个 $z_n \neq 0$. 如果 $r_1, r_2, \cdots$ 的收敛指数是 ρ_1，则标准乘积

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

是一 ρ_1 阶的整函数(此 p 的定义上面已经交代).

证. 设 ρ 是标准乘积的阶，由定理 1 已知 $\rho_1 \leqslant \rho$，今须证明 $\rho \leqslant \rho_1$. 命 k 为大于 1 的正整数

$$\log|P(z)| = \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \sum_{r_n > kr} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

对 Σ_2 有

$$\Sigma_2 = O\left(\sum_{r_n > kr}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right) = O\left(r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{p+1}}\right).$$

如果 $p = \rho_1 - 1$，则 $\Sigma_2 = O(r^{p+1}) = O(r^{\rho_1})$，不然，$\rho_1 + \varepsilon < p + 1$ (ε 充分小的正数)，则

$$r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{p+1}} = r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{\rho_1+\varepsilon}}\frac{1}{r_n^{-\rho_1-\varepsilon+p+1}}$$
$$< r^{p+1}(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p-1}\sum\frac{1}{r_n^{\rho_1+\varepsilon}} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

又在 Σ_1 中，以 u 表 $\frac{z}{z_n}$，则有 $|u| \geqslant \frac{1}{k}$. 因此

$$\log|E(u, p)| \leqslant \log(1 + |u|) + |u| + \cdots + \frac{|u|^p}{p} < K|u|^p.$$

此处 K 仅与 k 及 p 有关，故

$$\Sigma_1 = O\left(r^p \sum_{r_n \leqslant kr}\frac{1}{r_n^p}\right) = O\left(r^p\sum_{r_n \leqslant kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p} r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right)$$
$$= O\{r^p(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p}\sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}),$$

所以

$$\log|P(z)| = O(r^{\rho_1+\varepsilon}),$$

即得所证.

§ 4. Hadamard 分解定理

定理 1. 如果 $f(z)$ 是一 ρ 阶的整函数，其零点是 $z_1, z_2, \cdots$，$(f(0) \neq 0)$，则

$$f(z) = e^{Q(z)}P(z). \tag{1}$$

这儿 $P(z)$ 是由 $f(z)$ 的零点所形成的标准乘积，而 $Q(z)$ 是一多项式其次数不大于 ρ.

证. 已知 $f(z)$ 可以表为 (1) 的形式，其中 $Q(z)$ 是一整函数. 因此，所待证明者乃是 $Q(z)$ 是一多项式，其次数 $\leqslant \rho$.

取 $\nu = [\rho]$，则 $\rho \leqslant \nu$. 取 (1) 的对数，微商 $\nu + 1$ 次，得

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\nu}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = Q^{(\nu+1)}(z) - \nu!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

如能证明 $Q^{(\nu+1)}(z)=0$，则得 $Q(z)$ 是一多项式，其次数 $\leqslant\nu$.

命

$$g_R(z)=\frac{f(z)}{f(0)}\prod_{|z_n|\leqslant R}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}.$$

在圆 $|z|=2R$ 上，当 $|z_n|\leqslant R$ 时，

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right|\geqslant 1,$$

故在 $|z|=2R$ 上

$$|g_R(z)|\leqslant\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|=O(e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}}),\tag{2}$$

由于 $g_R(z)$ 是整函数，此式当 $|z|<2R$ 中也真.

命 $h_R(z)=\log g_R(z)$，对数取值由 $h_R(0)=0$ 决定，则 $h_R(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 中有则，故由 (2)，

$$\boldsymbol{R}\{h_R(z)\}<KR^{\rho+\varepsilon}.\tag{3}$$

由 Borel-Caratheodory 不等式，可知当 $|z|=r<R$ 时，

$$|h_R^{(\nu+1)}(z)|\leqslant\frac{2^{\nu+3}(\nu+1)!R}{(R-r)^{\nu+2}}KR^{\rho+\varepsilon},$$

特别取 $r=\frac{1}{2}R$，则

$$h_R^{(\nu+1)}(z)=O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}).\tag{4}$$

故当 $r=\frac{1}{2}R$ 时，

$$\begin{aligned}Q^{(\nu+1)}(z)&=h_R^{(\nu+1)}(z)+\nu!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}\\&=O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1})+O\left(\sum_{|z_n|>R}|z_n|^{-\nu-1}\right),\end{aligned}$$

当 $|z|<\frac{1}{2}R$ 时，上式也正确，当 ε 充分小及 $R\to\infty$ 时其第一项 $\to 0$. 由于 $\Sigma|z_n|^{-\nu-1}$ 收敛，第二项也 $\to 0$. 由于左方与 R 无关，故得所证.

习题. 证明如果 ρ 非整数，则 $\rho_1=\rho$.

§5. Mittag-Leffler 定理

命 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是仅有∞为聚点的贯，我们现在求一亚纯函数在 a_i 有给定的主展开部分

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\frac{\alpha_{k1}}{z-a_k}+\cdots+\frac{\alpha_{kl_k}}{(z-a_k)^{l_k}},\quad k=1,2,\cdots.\tag{1}$$

我们把极点排成为

$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant|a_3|\leqslant\cdots,$$

并暂为假定 0 非极点. 展开 (1) 为 z 的幂级数

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\beta_0^{(k)}+\beta_1^{(k)}z+\beta_2^{(k)}z^2+\cdots,\quad |z|<|a_k|. \tag{2}$$

命 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ 是一个正数贯，使级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k$$

收敛.

幂级数 (2) 在圆 $|z|<\frac{1}{2}|a_k|$ 一致收敛，所以可以取定 p_k，使

$$q_k(z)=\beta_0^{(k)}+\cdots+\beta_{p_k}^{(k)}z^{p_k}$$

适合于

$$\left|g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right|<\varepsilon_k, \tag{3}$$

做级数

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right]. \tag{4}$$

以原点为中心，半径为 R 作一圆 C. 由于 $|a_k|\to\infty$，故存在 N，使 $k>N$ 时，$R\leqslant\frac{1}{2}|a_k|$. 对这样的 k，估计 (3) 在圆 C 内是成立的，因此 (4) 在 C 内绝对而且一致收敛，而 $\sum_{k=1}^{N}$ 在圆内有极点 $a_1, \cdots, a_N$，而在各点有所给的主展开部分 (1)，并且 (4) 在圆 C 内仅有这些极点而已. 因为 R 可以任意大，因此 (4) 就是所求的亚纯函数.

如果 $z=0$ 也是极点，它的主展开部分是

$$g_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

则在 (4) 上再添加上 $g_0\left(\frac{1}{z}\right)$ 即得.

命 $f(z)$ 是任一亚纯函数，上法可作 $\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的主展开部分，因此 $f(z)-g(z)$ 在全平面上解析，因而得出

$$f(z)=F(z)+g_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right],$$

这儿 $F(z)$ 是整函数.

读者试比较 Weierstrass 与 Mittag-Leffler 两证明，看其中有原则相通处否？能否如上节一般更具体地给出 p_k，例如 $p_k=k$.

读者试考虑单位圆内的解析因子分解定理，亚纯函数是解析函数的商，亚纯函数的分项分数定理.

§ 6. ctg z 与 $\sin z$ 的表示式

函数

$$F(z)=\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z} \tag{1}$$

在 $z=k\pi$ 处有单极点，其留数是1，这儿 k 是任一非零的整数，除这些极点外，处处解析.

用上节方法可以作出函数

$$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right),$$

符号 Σ' 表示略去 $k=0$ 一项，此级数显然在任一点 $z\neq k\pi$ 是收敛的，并且以 $z=k\pi$ 为单极点，且有与（1）相等的留数，由上节结果可知 $F(z)$ 与 $F_1(z)$ 可能差一个整函数，现在我们进一步证明 $F(z)=F_1(z)$.

取 c_n 为以 $\left[x=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ y=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ 为四个顶点的正方形. 如第七章§11的方法考虑沿 c_n 的边界函数

$$f(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z\left(\frac{1}{x-z\pi}+\frac{1}{z\pi}\right).$$

由于 $z=0$ 是一二重极点，所以不能直接用原来的公式，在 c_n 上 $f(z)$ 无极点，在 c_n 内有极点 $z=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n$，当 $z=k$（k 非0整数）时，$f(z)$ 的留数等于

$$\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}.$$

在 $z=0$ 处 $f(z)$ 有一二重极点，展式是

$$\left(\frac{1}{z}-\frac{\pi^2 z}{3}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z\pi}+\frac{1}{x}+\frac{\pi z}{x^2}+\cdots\right),$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 的留数是

$$\frac{1}{x}.$$

$f(z)$ 在 $z=\frac{x}{\pi}$ 处的留数等于

$$-\operatorname{ctg}x.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}f(z)dz=\sum_{k=-n}^{n}{}'\left(\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)+\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x.$$

如能证明，当 $n\to\infty$ 时，左边 $\to0$，则问题已解决了.

已知

$$|\operatorname{ctg}(x+yi)|^2=\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos2x}.$$

在平行于 y 轴的 c_n 边上，即 $x=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，$\cos2x=-1$，即

$$|\operatorname{ctg}z|^2\leqslant\left|\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right|<1,$$

所以当 n 充分大时，由于 $\frac{1}{x-z\pi}+\frac{1}{z\pi}=0\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$，

$$\int_{x=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}f(z)dz=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

又在平行于 x 轴的边上，即 $y=\pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，

$$|\operatorname{ctg} z|^2\leqslant\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{e^{2y}+e^{-2y}-2}=\left(\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}\right)^2=O(1),$$

也得出所对应的积分 $\to 0$ (当 $n\to\infty$)，即得所证，也就是

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{1}{x-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right)=\frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2},\tag{2}$$

这级数是收敛的.

任作一边界不过极点的有界闭区域，包含 $z=0$ 点在内，以此区域内之每个极点为中心作一充分小之圆，则在挖掉这些(有限个)小圆后，级数(2)在这闭区域内是一致收敛的，设 z 为此中一点，由 0 到 z 逐项积分，但积分路线不过极点，得

$$\log\frac{\sin z}{z}=C+\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

即得

$$\frac{\sin z}{z}=C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

由于 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$，所以 $C=1$，即得 $\sin z$ 的无穷乘积表达式

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

或

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

如果改写为

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\lim_{m\to\infty}\prod_{n=-m}^{+m}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}},$$

这就是 Weierstrass 形式的乘积了.

例 1. 证明

$$\sec z=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2},$$

$$\cos z=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2-z^2}.$$

例 2. 证明

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

例 3. 证明

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}.$$

例 4.

$$\csc^2 z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

习题. 从

$$\frac{\sin \pi z}{\pi}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),$$

推出 $\sin z$ 以 2π 为周期.

§7. Γ 函 数

考虑 Weierstrass 乘积

$$ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{1}$$

这儿

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)$$

是 Euler 常数.

由于 $\Sigma\frac{|z|^2}{n^2}$ 收敛,故由第二节的证明方法中可知,取 $p_n=2$, 无穷乘积

$$\Pi E\left(-\frac{z}{n},1\right)$$

收敛,因此 (1) 是整函数.

我们定义

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{2}$$

由此立刻可见, $\Gamma(z)$ 有 $0,-1,-2,\cdots$ 作为其单极点,此外处处解析.

这样定义的 $\Gamma(z)$ 是否就是以往所定义的

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt?\quad (\boldsymbol{R}z>0)$$

在证明此点之前先由 (2) 推导出若干性质

定理 1. 除去 $z=0,-1,-2,\cdots$ 诸点外

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

证. 将 (2) 写成为

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\left[\lim_{m\to\infty}e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)z}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}\right]$$

$$=z\lim_{m\to\infty}\left[m^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]=z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]$$

$$=z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\right\}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}\right].$$

即得所证.

定理 2. 当 $Rz>0$ 及 n 是自然数时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\Gamma(z).$$

证. 命 $t=n\tau$, 得

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau.$$

分部积分 n 次得

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=\frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\Big|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1\tau^{z+n-1}d\tau$$

$$=\frac{1\cdot2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

由定理 1 可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^z=\Gamma(z).$$

定理 3. 当 $Rz>0$ 时,

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

证. 命

$$\Gamma_1(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

由定理 2 知

$$\Gamma_1(z)-\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt,$$

由于

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant n^{-1}t^2e^{-t},\qquad(3)$$

可知

$$\left|\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt\right|\leqslant\int_0^n n^{-1}t^2e^{-t}t^{x-1}dt\leqslant n^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}dt\to0.$$

即得所证.

但还须证明不等式(3)：当 $0\leqslant y<1$ 时，由幂级数显然有

$$1+y\leqslant e^{y}\leqslant(1-y)^{-1},$$

以 $\frac{t}{n}$ 代 y 得

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\geqslant e^{-t}\geqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}.$$

故

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}=e^{-t}\left\{1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right\}\leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^{2}}{n^{2}}\right)^{n}\right\}.$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时，由归纳法可证 $(1-\alpha)^{n}\geqslant 1-n\alpha$，以 $\frac{t^{2}}{n^{2}}$ 代 α，则得

$$1-\left(1-\frac{t^{2}}{n^{2}}\right)^{n}\leqslant\frac{t^{2}}{n},$$

因此

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\leqslant e^{-t}\frac{t^{2}}{n}.$$

即得所证.

习题 1. 求证：对任一自然数

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\Gamma(nz).$$

(Gauss-Legendre)

提示：先由定理 1 推出

$$\varphi(z)=\frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}$$

与 z 无关，再由 $\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ 算出 $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.

我们常用 $n=2$ 的特例

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z).$$

习题 2. 命

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

则

$$B(np,nq)=n^{-np}\frac{B(p,q)B\left(p+\frac{1}{n},q\right)\cdots B\left(p+\frac{n-1}{n},q\right)}{B(q,q)B(2q,q)\cdots B((n-1)q,q)}.$$

习题 3. 试证：如果 $a_1+\cdots+a_k=b_1+\cdots+b_k$，则

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_k)}\right\}=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)},$$

例如

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

习题 4. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n^l}\right) = -\frac{1}{\prod_{n=0}^{l-1} \Gamma(-x^{\frac{1}{m}}\omega_m)}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi}{l} i}.$$

习题 5. 证明

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -r - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m}\right).$$

§8. ζ 函 数

我们换一下符号，用复数 s 来做复变数，而命 $s = \sigma + it$，σ，t 是实数，Riemann ζ 函数的定义是

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

对任一 $\delta > 0$，这级数在 $\sigma \geqslant 1 + \delta$ 中的任一区域一致收敛．因此它在 $\sigma > 1$ 的半个平面上表解析函数．

这函数的来源是数论，在素数分布的研究中它有头等重要性，但其重要性并不局限于数论．在 Γ 函数及其相关的高级理论，积分方程的研究中都有用场．

(1) 仅在 $\sigma > 1$ 上定义，我们要看它在全平面上的性质，证明它是一个亚纯函数．从

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx, \quad \sigma > 0$$

出发．当 $\sigma \geqslant 1 + \delta$ 时

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}} e^{-(N+1)x} dx \right) = \lim_{N\to\infty} (I + II).\end{aligned}$$

当 $x \geqslant 0$，$e^x \geqslant 1 + x$，故第二积分的绝对值

$$|II| \leqslant \int_0^{\infty} x^{\sigma-2} e^{-Nx} dx = N^{1-\sigma}\Gamma(\sigma - 1),$$

故当 $N \to \infty$ 时，这积分 $\to 0$．因此

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}} dx, \quad \sigma > 1.$$

考虑积分

$$I(s) = \int_c \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz. \tag{2}$$

把平面沿正实轴切开，这儿积分途径沿上切口由 $+\infty$ 到 $\delta(>0)$，再沿圆 $|z| = \delta$ 到下切口，沿下切口回到 $+\infty$，这儿函数 z^{s-1} 定义是

$$e^{(s-1)\log z},$$

在开始时 $\log z$ 是实的，故沿 c 走时 $I(\log z)$ 从 0 变到 $2\pi i$.

在小圆 $|z|=\delta$ 上，

$$|z^{S-1}|=e^{(\sigma-1)\log|z|-t\arg z}\leqslant|z|^{\sigma-1}e^{2\pi|t|},$$

$$|e^z-1|>A|z|.$$

因此，当 $\sigma>1$ 时在 $|z|=\delta$ 上的积分随 δ 而趋于 0. 故得

$$I(s)=-\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+\int_0^\infty\frac{(xe^{2\pi i})^{s-1}}{e^x-1}dx$$

$$=(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s)=\frac{2i\pi e^{i\pi s}}{\Gamma(1-s)}\zeta(s),$$

即得

$$\zeta(s)=\frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz. \tag{3}$$

此示，当 $\sigma>1$ 时，(3) 即前面的 ζ 函数. 但积分 $I(s)$ 在 s 平面上的任一有限部分都是一致收敛的，因此公式 (3) 给与 $\zeta(s)$ 的全平面解析拓展，其可能的奇点来自 $\Gamma(1-s)$ 的极点 $s=1,2,3,\cdots$，但已知 $\zeta(s)$ 在 $s=2,3,\cdots$ 是有限的，故仅有 $s=1$ 处可能有一个奇点，在 $s=1$ 是一个单极. 由

$$I(1)=\int_c\frac{dz}{e^z-1}=2\pi i$$

及

$$\Gamma(1-s)=-\frac{1}{s-1}+\cdots,$$

可知这单极的留数是 1.

如果 s 是整数，积分 $I(s)$ 是单值的. $I(s)$ 可以用留数法算出

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{1}{2}z+B_1\frac{z^2}{2!}-B_2\frac{z^4}{4!}+\cdots,$$

这儿 $B_1,B_2,\cdots$ 是 Bernoulli 数，而且可以求得

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad\zeta(-2m)=0,\quad\zeta(1-2m)=\frac{(-1)^mB_m}{2m},\quad m=1,2\cdots.$$

§9. 函 数 方 程

定理 1. 在全平面上 $\zeta(s)$ 是处处有限的，但 $s=1$ 例外，该处有一单极，留数为 1，并有函数方程

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{1}{2}s\pi\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

证. 仍取上节(2)中的被积函数，但积分路线改为：c_n 沿正实轴从 $+\infty$ 到 $(2n+1)\pi$，再沿以 $(2n+1)\pi(\pm1\pm i)$ 为顶点的方块一周，然后沿正实轴回到 ∞，在 c (即上节(2)的积分路线)与 c_n 之间被积函数以 $\pm2i\pi,\cdots,\pm2i\pi n$ 为极点，在 $2mi\pi$ 与 $-2mi\pi$ 的留数之和是

$$(2m\pi e^{\frac{1}{2}i\pi})^{s-1}+(2m\pi e^{\frac{3}{2}i\pi})^{s-1}=(2m\pi)^{s-1}e^{i\pi(s-1)}2\cos\frac{1}{2}\pi(s-1)$$

$$=-2(2m\pi)^{s-1}e^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s,$$

故由留数定理

$$I(s)=\int_c\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz=\int_{C_n}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz+4\pi ie^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s\sum_{m=1}^{n}(2m\pi)^{s-1},$$

命 $\sigma<0$ 并使 $n\to\infty$，则函数 $\frac{1}{e^z-1}$ 在 c_n 上有界，$z^{s-1}=O(|z|^{\sigma-1})$，故沿 c_n 的积分 $\to 0$，即得

$$I(s)=4\pi ie^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s\sum_{m=1}^{\infty}(2m\pi)^{s-1}=4\pi ie^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s),$$

即得函数方程．由解析函数唯一性定理可知它在 $\sigma\geqslant 0$ 亦成立．

由函数方程立刻可以推出几个小结果．由上节 $\zeta(1-2m)$ 的值立可推得

$$\zeta(2m)=2^{2m-1}\pi^{2m}\frac{B_m}{(2m)!},\quad m=1,2,\cdots.$$

今往证

$$\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

把函数方程改写为

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{1}{2}\pi s\Gamma(s)\zeta(s),$$

然后求函数方程的对数微商，得

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}=-\log 2\pi-\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}+\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

在 $s=1$ 处，

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}=-\frac{1}{s-1}+O(|s-1|),\quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+\cdots=-\gamma+\cdots,$$

及

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{-\frac{1}{(s-1)^2}+k+\cdots}{\frac{1}{s-1}+\gamma+k(s-1)}=-\frac{1}{s-1}+\gamma+\cdots,$$

此处 k 是常数．故当 $s\to 1$ 时，

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}=-\log 2\pi,$$

故得 $\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\log 2\pi$.

引进新符号

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

则函数方程变为

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

如果命

$$\Xi(z)=\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right),$$

则

$$\Xi(z)=\Xi(-z).$$

§10. 球 面 收 敛

为了要把一致收敛的概念,正规族的概念推广到亚纯函数,我们引进球面一致收敛的概念.

在 Neumann 球上,两点 (ξ,η,ζ) 与 (ξ',η',ζ') 的距离,定义为过此两点的大圆的最短距离. 二复数 z, z' (包括 $z=\infty$, $z'=\infty$ 在内) 的球距离定义为其球面两对应点的距离,以 $[z, z']$ 表之.

一个函数 $Z=f(z)$ 称为在 z_0 点球连续,如果给了 ε, 有一 δ 存在使适合 $[z_0, z]<\delta$ 的 z 常有

$$[Z_0, Z]<\varepsilon.$$

同法定义球一致连续. 不难证明: 在一闭域上连续的函数一定是一致连续.

亚纯函数一致收敛: 命

$$Z_1=f_1(z),\ Z_2=f_2(z),\ \cdots,\ Z_n=f_n(z),\ \cdots$$

表一个在 D 内收敛的亚纯函数贯, 并假定以 $Z=f(z)$ 为其极限. 如果给了 $\varepsilon>0$, 可以找到一个整数 N 与 z 无关,使 $n>N$ 时,对所有的 $z\in D$ 常有

$$[Z_n, Z]<\varepsilon,$$

则 $\{f_n(z)\}$ 称为一致收敛于 $f(z)$.

更具体地写出 $[z_1, z_2]$ 的意义,已知 z_i 对应于球面上的一点

$$\xi_i=\frac{2x_i}{1+|z_i|^2},\quad \eta_i=\frac{2y_i}{1+|z_i|^2},\quad \zeta_i=\frac{|z_i|^2-1}{|z_i|^2+1}.$$

(ξ_i, η_i, ζ_i) 可以看成为过球面的单位矢量,命 θ 是这二单位矢量的夹角,则

$$\cos\theta=\frac{4x_1x_2+4y_1y_2+(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}$$
$$=\frac{2(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1}{1+|z_1z_2|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}=\left|\frac{z_1-z_2}{1+z_1\bar{z}_2}\right|^2,$$

因此

$$\theta=\pm 2\operatorname{tg}^{-1}\left|\frac{z_1-z_2}{1+z_1\bar{z}_2}\right|.$$

以往我们常用 $\frac{1}{|z|}<\varepsilon$ 作为∞点的邻域,现在看来是有据的了,因为

$$[z_1, \infty] = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left|\frac{1}{z_1}\right|.$$

命

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

是一酉变换，即

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0, \tag{1}$$

则

$$[w_1, w_2] = [z_1, z_2],$$

由于

$$w_1 - w_2 = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_1 - z_2)}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)},$$

及

$$1 + w_1\bar{w}_2 = 1 + \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}\ \frac{\bar{\alpha}\bar{z}_2 + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{z}_2 + \bar{\delta}} = \frac{1 + z_1\bar{z}_2}{(\gamma z_1 + \delta)(\bar{\gamma}\bar{z}_2 + \bar{\delta})}.$$

由于 $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$，可知

$$[w_1, w_2] = [z_1, z_2].$$

由此可得如果

$$f_1, \cdots, f_n, \cdots$$

球一致收敛于 f，则

$$g_\nu = \frac{\alpha f_\nu + \beta}{\gamma f_\nu + \delta},$$

也球一致收敛于

$$g = \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}.$$

其中 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 适合条件 (1).

如果不用球面语言(或椭圆几何的语言)，我们可用以下的定义：

1. 如果 z_0 非 f 的极点，则在 z_0 的邻域内 $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$ 的意义就是通常的意义.

2. 如果 z_0 是 f 的极点，则在 z_0 的邻域内 $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$ 的意义是 $\frac{1}{f_n(z)}$ 一致收敛于 $\frac{1}{f(z)}$. (注意，此邻域内一定不包含 $f_n(z)$ 的零点.)

§ 11. 亚纯函数的正规族

定理 1. 命 $\{f_\nu(z)\}$ 是在域 G 上的一族亚纯函数. 在 w 平面上有一个区域 D，这些函数不取 D 内的数值，则 $\{f_\nu(z)\}$ 成一正规族.

证. 命 A 是 D 的一内点，作以 A 为中心，δ 为半径完全包含在 D 内的闭圆，则

$$|f_\nu(z) - A| > \delta,$$

命

$$g_\nu(z)=\frac{\delta}{f_\nu(z)-A},$$

则 $g_\nu(z)$ 在 G 上有则而且有界（$|g(z)|<1$）. 故 $\{g(z)\}$ 成为正规族.

考虑 $f(z)$ 的任一无穷子集合，则对应的 $g(z)$ 中包有一个一致收敛的贯 $g_n(z)$，命 $g_0(z)$ 为其极限函数,因此可知 $\frac{1}{g_n(z)}$ 球收敛于 $\frac{1}{g(z)}$, 因而 $f_n(z)$ 球收敛于

$$f_0(z)=\frac{\delta}{g_0(z)}+A.$$

附记. 有以下更深刻的结果,但不在此证明了，一个亚纯函数族，如果不取一曲线上的点,则成一正规族. 更深刻些:

定理 2. 一个在域 D 上解析的函数族 $\{f_\nu(z)\}$，如果其值均不取两点 (a, b) 其中 $a\neq b$，则 $\{f_\nu(z)\}$ 为正规族.

定理 3. 一个在域 D 上的亚纯函数族,如果不取三值 (a, b, c) 其中 $a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$，则成为正规族.

现在讲几个容易推出的结果.

定理 4 (Montel). 假定 $f(z)$ 是 z 的解析函数. 在半条 $S: a<x<b$，$y>0$ 中有则. 假定 $f(z)$ 在 S 中有界. 如果 $a<\xi<b$,

$$\lim_{x\to\infty} f(\xi+iy)=l,$$

则对任一 $\delta>0$，在 $a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$ 中,当 $y\to\infty$ 时 $f(z)$ 一致收敛于 l.

证. 在矩形 R

$$a<x<b,\ 0<y<2$$

中考虑函数族

$$f_n(z)=f(z+in),$$

这是一个囿族，而且对任一 $\lambda(0<\lambda<2)$ 当 $n\to\infty$，$f_n(\xi+\lambda i)\to l$，由Vitali 定理，在 $a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$ 中，$f_n(z)\to l$，这证明了本定理.

用保角变换 $z=i\log w$，上定理变为

定理 5. 如果 $\phi(w)$ 在角 $\alpha<\arg w<\beta(|\alpha-\beta|<\pi)$ 中有界,如果对某一 θ,

$$\lim_{r\to\infty}\phi(re^{i\theta})\to l(\alpha<\theta<\beta),$$

则在 $a+\delta\leqslant\arg w\leqslant\beta-\delta$ 中 $\phi(w)$ 一致地趋于 l.

定理 6 (Picard). 一非常数的整函数 $f(z)$ 取所有的有限值,最多仅有一例外而已.

证. 在 $|z|<1$ 内研究

$$f_0(z)=f(z),\ \cdots,\ f_n(z)=f(2^n z),\ \cdots.$$

这族在 $z=0$ 有界，如有二个例外值，则 $\{f_n(z)\}$ 为一正规族. 由第八章 § 10 定理 1 可知，则一定有子贯 $f_{n_\nu}(z)$ 在 z 平面上任一有限部分一致收敛于一整函数 $f(z)$，我们开始假设 $f_{n_\nu}(z)$ 即 $f_n(z)$. 当 $|z|\leqslant\frac{1}{2}$ 时,

$$|f_n(z)|\leqslant M.$$

即当 $|z|\leqslant 2^{n-1}$ 时,

$$|f(z)| \leqslant M.$$

一有上界的整函数仅能是常数（Liouville 定理）. 与题设相矛盾.

定理 7（Schottky）. 如果在 $|z|\leqslant 1$ 内 $f(z)$ 有则，而且不取 0 与 1，则当 $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ 时，

$$|f(z)| < \Omega(|f(0)|).$$

此处 Ω 是一正数仅依赖于 $f(0)$.

证. 研究适合于 $f(0)=a_0$ 及定理假定的函数族. 由定理 2，成一正规族，而且在 $z=0$ 时有限，故由第八章 § 10 定理 1 可知：在 $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ 中，

$$|f(z)| < \Omega(|f(0)|).$$

第十章 保角变换

§1. 重要内容概要

在保角变换的理论中最主要的结果当然是我们屡次提到的 Riemann 映照定理.

定理 1——基本定理 (Riemann). 任何一个单连通域 G，如至少有两个不同的边界点，一定可以一对一地，保角地映照到单位圆的整个内部，这一映照函数被以下的条件唯一决定：G 内一点及一过此点的方向变为单位圆内一点及过该点的一个方向.

说得更精确些，单位圆内的一点不妨假定它是 $w=0$，方向是沿 x 轴正向，则结果可转述为：命 z_0 是 G 的内点，一定有一而且唯一的保角变换把 G 一一地变为单位圆的整个内部，而且 $f'(z_0)>0$.

逆变换

$$z=g(w)$$

把单位圆变为 G，这逆变换有下列性质：(i) 在 $|w|<1$ 中 $g(w)$ 是单值解析函数，(ii) 如果

$$g(w_1)=g(w_2),\quad |w_1|<1,\ |w_2|<1,$$

则 $w_1=w_2$. 这样的函数 $g(w)$ 称为单叶函数. 因此，单位圆上全部单叶函数的探讨，就等价于研究全部单连通域.

命

$$g(w)=a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots,\quad |w|<1,$$

则必有 $a_1\neq 0$，因此函数 $\dfrac{g(w)-a_0}{a_1}=h(w)$ 依然是单叶函数. 所以只需研究

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots,\quad |z|<1$$

形式的单叶函数而不失去其普遍性. 把一个单叶函数看成为无穷维空间的一个点 $(a_2, a_3,\cdots)$，这些点所成的集合的结构如何？这是单叶函数论的中心问题，但是这是十分困难的问题. Bieberbach 猜测，这一集合包在一个无穷维体

$$|a_n|\leqslant n$$

之中，这是数学上的著名难题.

Riemann 定理解决了单连通域的内部问题，边界可能十分复杂. 例如，由 $\frac{1}{2}$ 到 1 作一线段把这一线段和单位圆的圆周作为边界，依然是一个单连通域，用此方法可以得出十分复杂的边界. 但 Riemann 定理告诉我们在研究内部映照的时候，边界是无关紧要的，这内部映象反映在边界上，可能既不是一对一，又不是连续的，因为如果是一对一且连续的，则单位圆周将变为 Jordan 曲线，关于这我们有以下的：

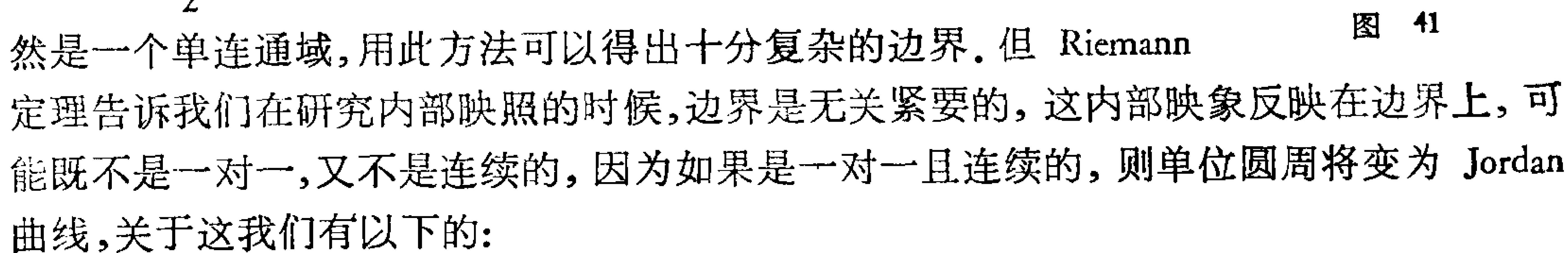


图 41

定理 2. 任何一个以 Jordan 曲线为周界的域 G，可以一对一地保角地映到单位圆的整个内部，而且这变换在单位圆和 G 的闭包上仍是连续的，使得 Jordan 曲线和单位圆

周之间也成为一个一一对应双向连续的关系，并且方向相同．如果在 Jordan 曲线上任取三点，单位圆周上也任取三点，但它们是同向的，则有一个而且唯一的一个，把 Jordan 曲线上的三点依次变为圆周上的三点，而且有以上所讲的性质．

这定理不但说明了边界关系，而且指出了 Jordan 曲线的一个表达方法：$g(w)$ 在单位圆内解析，而 $g(e^{i\theta})$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 就描述了 Jordan 曲线．命

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

则 Jordan 曲线一定可以表为 Fourier 级数

$$\tau(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

的形式，即命 $a_n = \alpha_n + i\beta_n$，

$$x = \varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta),$$

$$y = \phi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta).$$

注意，$\varphi(\theta)$ 是 $\phi(\theta)$ 的共轭 Fourier 级数，除去一常数可由 $\phi(\theta)$ 唯一决定．给与任一连续函数 $\phi(\theta)$，我们有一 Fourier 级数（用 $(c, 1)$ 求和法，这 Fourier 级数也恰巧代表 $\phi(\theta)$）．但问题并不如此简单，其中包含了一个一一对应问题，即需要由

$$\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2),\ \phi(\theta_1) = \phi(\theta_2),\quad 0 \leqslant \theta_1,\ \theta_2 < 2\pi$$

而得出 $\theta_1 = \theta_2$ 来．因此研究 Jordan 曲线问题转变而为研究适合于以上条件的以 2π 为周期的连续函数的问题．

保角变换在流体力学、电学、弹性力学中都有广泛的应用，在应用的时候，我们要求用具体数据求出所需要的保角变换来，由于任一 Jordan 曲线都可以用多边形来追近，因此，具体地把多边形变为单位圆（或上半平面）的计算方法也是十分重要的．（何况有时客观数据也仅仅知道其边界上的若干点．）关于这我们将介绍 Schwarz-Christoffel 法，但 Schwarz-Christoffel 法依然不是简单的数值计算方法．

§2. 单叶函数

定义． 在 D 域内，一个解析单值而不取任何数值一次以上的函数 $f(z)$ 称为 D 内的单叶函数．

所谓不取任何数值一次以上的意义是：由 $f(z_1) = f(z_2)$，$z_1 \in D$，$z_2 \in D$ 可以推出 $z_1 = z_2$．

函数 $w = f(z)$ 把平面上的区域 D 映照到 w 平面的区域 D' 其间的关系是一一对应的．

如果 $f(z)$ 在 D 内单叶，则在 D 内 $f'(z) \neq 0$．若不然，假定 $f'(z_0) = 0$，则 $f(z) - f(z_0) = 0$ 在 $z = z_0$ 有 $n(\geqslant 2)$ 重根．由于 $f(z)$ 非常数，故有一圆 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 在其上 $f(z) - f(z_0) \neq 0$，在其内 $f'(z)$ 除 $z = z_0$ 外无零点．命 m 为 $|f(z) - f(z_0)|$ 在圆周上的下界．由 Rouché 定理（第七章，§9），如果 $o < |a| < m$，$f(z) - f(z_0) - a$ 在

此圆内有 n 个根(它们无一是重根，因为 $f'(z)$ 在此圆内无其它零点)．这与 $f(z)$ 不取任何值一次以上相违背,因得所证．

单叶函数的单叶函数仍然是单叶函数．更具体些：如果 $f(z)$ 在D内单叶,其值包含于 D' 内, $F(w)$ 在 D' 内单叶,则 $F(f(z))$ 在D内单叶．

§3. Taylor 级数求逆

定理 1. 命 $f(z)$ 在 $z=0$ 有则，$f'(0)\neq 0$，则有一 ρ 存在，在 $|z|\leqslant\rho$ 中 $f(z)$ 是单叶的．

更精确些有

定理 2 (Landau)．命

$$w=f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots,\quad a_1\neq 0$$

在 $|z|\leqslant R$ 中有则且 $|w|<M$，则它有一逆函数 $z=g(w)$ 在 $|w|<\phi(M,R|a_1|)$ 中是有则单值的,而且 $|g(w)|<R$，此处 ϕ 是一个仅与 M，R，$|a_1|$ 有关的函数．

证．先设 $a_1=1$，$R=1$．

由最大模原理

$$\max_{|z|=r}|a_2+a_3z+a_4z^2+\cdots|\geqslant|a_2|,\quad 0<r<1,$$

并且左边是 r 的增函数．由

$$\max_{|z|=r}|f(z)-z|=r^2\max_{|z|=r}|a_2+a_3z+a_4z^2+\cdots|,$$

可知

$$\frac{1}{r}\max_{|z|=r}|f(z)-z|$$

随 r 而趋于 0，故有一 R'，在 $0<r<R'$ 中，

$$\phi(r)=r-\max_{|z|=r}|f(z)-z|=r\left(1-\frac{1}{r}\max_{|z|=r}|f(z)-z|\right)>0.$$

因此，当 $o<r<R'$ 及 $|z|=r$ 时

$$|f(z)|=|z-\{z-f(z)\}|\geqslant|z|-|z-f(z)|\geqslant\phi(r)>0,$$

即在 $|z|<R'$ 中,原点是 $f(z)$ 的唯一零点．

取一固定的 r，当 $|y|<\phi(r)$ 时考虑积分

$$I(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)-y}dz.$$

当 $y=0$ 时,这积分的数值等于 1，其原因是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r<R'$ 中只有一个原点是一级零点而无极点．当 $|y|<\phi(r)$ 时，在 $|z|=r$ 上 $|f(z)|\geqslant\phi(r)>|y|$，所以 $I(y)$ 是 y 的连续函数,因此当 $|y|<\phi(r)$ 时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)-y}dz=1.$$

即给一 y 适合于 $|y|<\phi(r)$，方程式 $f(z)=y$ 在 $|z|<r$ 中有一且唯一解．这就是，逆函数 $z(y)$ 在 $|y|<\phi(r)$ 内是单值的．

由留数定理知道

$$z(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z\frac{f'(z)}{f(z)-y}dz.$$

故在 $|y|<\phi(r)$ 中，$z(y)$ 是 y 的有则函数.

问题归结为找一适当的 r 使 $\phi(r)>0$. 首先，证明 $M\geqslant 1$. 由于 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant 1$ 中有则，

$$\max_{|z|=1}|f(z)|=\max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\max_{|z|=1}|1+a_2z+\cdots|\geqslant 1.$$

其次，如取 $r=\frac{1}{4}M$ 即能达到目的. 由 Taylor 系数的 Cauchy 估计

$$\phi\left(\frac{1}{4M}\right)\geqslant r-\sum_2^\infty Mr^n=r-\frac{Mr^2}{1-r}.$$

由于 $\frac{1}{1-r}=\frac{4M}{4M-1}\leqslant\frac{4}{3}$，故

$$\phi\left(\frac{1}{4M}\right)\geqslant r-\frac{4Mr^2}{3}=\frac{1}{6M}.$$

因此，当 $|w|<\frac{1}{6M}$ 时，逆函数 $z=g(w)$ 有则，而且在其中 $|g(w)|\leqslant 1$. 回到一般情况. 命

$$F(z)=\frac{f(Rz)}{Ra_1},$$

则 $F(0)=0$，$F'(0)=1$，而且当 $|z|\leqslant 1$ 时

$$|F(z)|\leqslant\frac{M}{R|a_1|}.$$

故 $F(z)$ 适合于以上的条件，只需把M换为 $\frac{M}{R|a_1|}$ 即是. 因此当 $|w|<R|a_1|/6M$ 时 $w=F(z)$ 有逆函数 $z=G(w)$，它是有则，而且 $|G(w)|\leqslant 1$.

命 $Rz=z'$，则

$$f(z')=Ra_1F(z'/R),$$

故

$$\frac{z'}{R}=G\left(\frac{w}{Ra_1}\right),\ z'=RG\left(\frac{w}{Ra_1}\right).$$

这式证明，当

$$\left|\frac{w}{Ra_1}\right|<\frac{R|a_1|}{6M}$$

时，z' 是有则函数，而且 $|z'|<R$，即

$$|w|<\frac{R^2|a_1|^2}{6M}=\phi(M,R|a_1|)$$

适合所求.

附记. 如果 $a_0=f(0)\neq 0$，我们的定理依然成立，只须把 $w-a_0$ 来代替 w 即得. 同样可以用 $z-z_0$ 来代替 z，而得出任一点的逆函数定理.

§4. 域的映象

假定 $f(z)$ 在域 D 内解析，$f'(z)\neq 0$，又设 E 为 $f(z)$ 在 w 平面上的象点集合．由上节已知在 E 上的任一点的充分小的邻域中逆函数 $z=g(w)$ 是有则的单值的，也就是如果 $f(a)=b$，则绕 b 作一小圆，其中的任一数值 b'，一定有一与 a 邻近的数 a'，使 $f(a')=b'$．今往证：对应 D 中的 w 的数值成一域 D'．

证．从刚才说过的话已知 D' 是开集．因此所待证的是 D' 是连通的．设 w_1 及 w_2 为 D' 任意两点，则它们至少各有一原象点 z_1，z_2，在 D 内可作一折线 C 把 z_1，z_2 联起来，这折线以 $z(t)$ 表之，而且 $z(t_1)=z_1$，$z(t_2)=z_2$．C 上的任一点都是内点．在 w 平面上对应的曲线以 C' 表之：$w[z(t)]$，当 $t=t_1,t_2$ 时 $w_1=w(z_1)$，$w_2=w(z_2)$．C' 的点也全是内点，这证明了 D' 的连通性．

要注意的是 D' 十分可能是多叶域，因为 $f'(z)\neq 0$ 并不保证 $f(z)$ 是单叶函数．我们再看 $f'(a)=0$ 的情况，此时

$$w=f(z)=b+a_k(z-a)^k+\cdots,\quad a_k\neq 0,\ k>1.$$

为简单起见命 $w-b=S$，$z-a=t$，则

$$S=a_kt^k(1+p_1t+p_2t^2+\cdots),$$

在 $t=0$ 附近

$$(1+p_1t+p_2t^2+\cdots)^{1/k}=1+q_1t+q_2t^2+\cdots,$$

即得

$$S=a_kt^k(1+q_1t+q_2t^2+\cdots)^k,$$

即

$$S^{1/k}=a_k^{1/k}t(1+q_1t+q_2t^2+\cdots\cdots).$$

这函数有逆函数

$$t=g(S^{1/k}),$$

即得原函数的逆函数是

$$z=a+b_1(w-b)^{1/k}+b_2(w-b)^{2/k}+\cdots\cdots.$$

绕 b 一圈，有 k 分支轮转，即由 $(w-b)^{1/k}$，$(w-b)^{1/k}e^{\frac{2\pi i}{k}}$，$\cdots\cdots(w-b)^{1/k}e^{\frac{2\pi i}{k}(k-1)}$ 轮转而得 k 个函数．这样的点称为歧点，而称 k 为这歧点的重数．由于 $f'(z)$ 的零点是孤立的，因此在 D 内的任一闭子集中仅有有限个这样的歧点，如果我们考虑 "Riemann" 面，我们将会证明，$w=f(z)$ 也是把域变为域的．

定理 1（Weierstrass 单一定理）．如果 $f(z)$ 在单连通域 D 内有则，则 $f(z)$ 是单值的．

这定理可用解析延拓法证明．

§5. 单叶函数贯

定理 1. 一致收敛的单叶函数贯的极限仍然是单叶函数或常数．

例子 $f_n(z)=\frac{z}{n}$ 告诉我们：极限是常数的情况是存在的．更确切些：如果对任一 n，$f_n(z)$ 在 D 内是单叶的，而且在 D 内 $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 D 内仍然单叶，或为常数．

证．我们已经知道，在 D 中 $f(z)$ 是解析的，单值的．如果不单叶，则有二点 z_1，z_2 在 D 中，而 $f(z_1)=f(z_2)=w_0$，以 z_1，z_2 为中心各作一圆，既不重叠又全在 D 内，并且 $f(z)=w_0$ 在圆周上无解(除 $f(z)$ 是常数外，这是经常可能的)．命 m 是 $|f(z)-w_0|$ 在这两圆上的下界，取 n 充分大使在两圆周上，$|f(z)-f_n(z)|<m$，则由 Rouché 定理，函数

$$f_n(z)-w_0=\{f(z)-w_0\}+\{f_n(z)-f(z)\}$$

的根数与 $f(z)-w_0$ 相等，即至少有二根，即 $f_n(z)$ 非单叶，这是矛盾的，定理得证．

§6. 边界与内部

定理 1. 命 C 是一 Jordan 曲线，包有一域 D．命 $w=f(z)$ 是 z 的一解析函数，在 D 及 C 上有则，把 C 一一地映为另一闭 Jordan 曲线 C'，则在 D 内 $f(z)$ 是单叶的．

证．命 D' 代表 C' 所包的域．

假定 z_0 是 D 内一点，则 $f(z_0)$ 不等于 $f(z)$ 在 C 上的数值，命 Δ_C 表示绕 C 的变化，则

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\log(f(z)-f(z_0)) \tag{1}$$

等于 $f(z)-f(z_0)$ 在 C 内的零点数，故是一正整数(因为至少有一根)，但这也等于

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C'}\arg(w-w_0),\quad w_0=f(z_0), \tag{2}$$

如果 w_0 在 C' 外，(2) 等于 0，如 w_0 在 C' 内，(2) 等于 ±1 (其符号依赖于正向或反向)．由 (1) 知 w_0 在 C' 之内，C' 依正向行走，故 $f(z)$ 在 D 内取 w_0 一次，而且仅有一次，此示 $f(z)$ 完全落在 D' 内，但 D' 的点也都是 D 的象点，因为否则在 D 内还有别的边界点与假设矛盾．所以 D 单叶地变为 D'．

附记 1. 以上的假定"$f(z)$ 在圆周上解析"可以减弱些：如果 C 上有些点仅连续而不解析也成．

假定 z_1 是边界上的一个奇点，在 z_1 附近作一内向小圆弧，以这些圆弧代替 z_1 的曲线部分，所得的一曲线以 C_1 表之，在 C_1 内的零点数等于

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1}\arg\{f(z)-w_0\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz,$$

如果在 z_1 的邻域内有 $f'(z)=O(|z-z_1|^a)$，$a>-1$，则当 $C_1\to C$ 时，沿 C_1 的积分趋于 C 的积分．

附记 2. 在周界上 $f(z)$ 也可能有一极点，如此则 D' 拓展到 ∞，如果这一极点是一阶的，边界的其它部分相当普通，则以上的讨论仍然正确．先来一变形把这一极点变为 $z=0$，而且把这区域 D 变成为 $\boldsymbol{R}z\geqslant0$ 上的一部分，无妨假设 $f(z)$ 在这点的留数为 1 (否则除以一常数即可)，故 $f(z)$ 可表为

$$w=f(z)=\frac{1}{z}+g(z),$$

此处 $g(z)$ 在 D 内有则且有界，因此对 D 内的 z 有

$$\boldsymbol{R}w \geqslant \min \boldsymbol{R}\{g(z)\},$$

命之为 a，命 $b<a$，则当 $z\in D$，$|w-b|\geqslant a-b$，故

$$\zeta=\frac{1}{w-b}=\frac{z}{1+zg(z)-bz}$$

在 D 内有则，上述定理可以直接用到 ζ 上，由于 w 是 ζ 的单叶函数，这定理也可以用到 $w=f(z)$ 上.

但这结果对高次的极并不正确.

例 1. 命 $w=\frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$，若 $z=e^{i\theta}$，则

$$w=\frac{1}{i}\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

当 z 描绘单位圆时，即 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时，w 描绘实轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$，$|z|=1$ 的周界上只有一单极点，故 z 平面上的单位圆，单叶地映成上半 w 平面，这一事实是已知的事实.

例 2. 命

$$w=i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3,$$

命 $z=e^{i\theta}$，则 $w=-\operatorname{ctg}^3\frac{\theta}{2}$，这也建立了 z 平面的单位圆周与 w 平面上实轴的一一对应关系，但由于边界上有一三重极点，这二曲线所包的域并不一定一一对应，确切些说：

$$\begin{aligned}w&=i\left(\frac{x+iy+1}{x+iy-1}\right)^3\\&=i\frac{(x^2+y^2-1)^3-12(x^2+y^2-1)y^2}{[(x-1)^2+y^2]^3}+\cdots,\end{aligned}$$

而 $v=0$ 对应于

$$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2\sqrt{3}y-1)(x^2+y^2+2\sqrt{3}y-1)=0,$$

这表三个圆. 若 z 在此三圆之外，则 $v>0$，在一圆之外，二圆之内也有 $v>0$，所以有三个区域都映为上半平面（见图，有阴影部分），同样，三个区域映为下半平面（图上空白部分）.

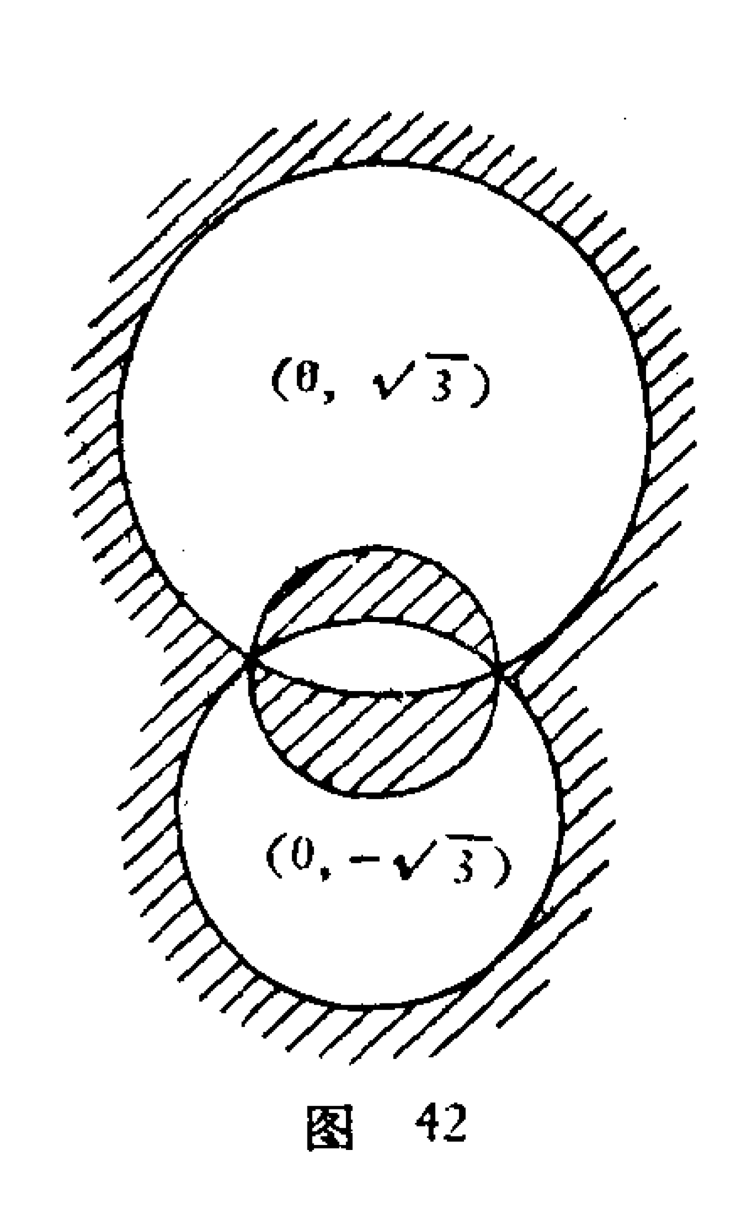


图 42

§7. Riemann 映照定理

定理 1 (Riemann). w 平面上的任何一个单连通域 D，如果它至少有两个边界点，我们一定有一单叶函数 $w=f(z)$，它把 z 平面上的单位圆变为 w 平面上的 D 域.

证. 假定 $w=f(z)$ 是这种的函数，则其逆函数 $z=g(w)$ 在 D 内有则，有界 $(|g(w)|<1)$. 考虑在 D 内有则有界的函数类，并且适合于 $g(w_0)=0$，$g'(w_0)=1$，

这儿 w_0 是 D 内的一定点，这些函数将 D 映照到其他域(今后称此函数类为 C 类).

1) 确有这样的函数类存在. 命 a, b 是两边界点，考虑函数

$$\zeta=\sqrt{\frac{w-a}{w-b}},$$

当 w 过一单连通域 D 时，它不能画出一个分开 a 与 b 的封闭曲线，即 $\zeta(w)$ 在 w 内是单值的，由于根号下的函数是线性的，它不能二次取同一数值，故如果我们先在一点取定了平方根的符号，则 $\zeta(w)$ 也有此性质，故 $\zeta(w)$ 把 D 单叶地变为 ζ 平面上一域 D'，如果我们取平方根的另一符号$\left(\text{即函数}\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\text{的另一分支}\right)$，则 D 变为另一域 D''，因此 D' 和 D'' 是两个以原点为对称的域，如果 C' 是 D' 的任一内点，则 $C''=-C'$ 是 D'' 的内点，函数 $\tau=\frac{1}{\zeta-C''}$ 在 D' 上是单值、有则有界的函数，减以 $\tau(w_0)$，并除以 $\tau'(w_0)$，即得一所需的函数.

2) 命 $g(w)$ 是 C 类上的函数，以 $M(g)$ 表 $|g(w)|$ 在 D 内的最大值. 命 ρ 表示 $M(g)$ 的下确界(对所有的 $g\in C$ 而言). 今往证明，C 类中必有一函数 $h(w)$ 使 $M(h)=\rho$.

如果不然，C 中必有一组函数 $g_1, g_2, \cdots$ 使

$$\lim_{n\to\infty}M(g_n)=\rho.$$

即给予任一 $\varepsilon>0$，有一整数 N 存在，使 $n>N$ 时

$$M(g_n)<\rho+\varepsilon,$$

即 $g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots$ 有同一的上界，以 B 表之. 今往证明，$\{g_n\}$ 有一子贯在 D 内的任一域内一致收敛，用前面已经叙述过的 Cantor 对角线法，可以取得一个子贯，它在 D 内一处处稠密的可数集上——例如有理点集——有极限存在. 由 Vitali 定理，这函数贯在 D 内的任一闭子域中一致收敛于一极限函数，不妨假设，这就是原来的函数贯 $\{g_n(w)\}$，并命 $g(w)$ 是其极限函数，由 § 5 可知 $g(w)$ 属于 C 类而且 $M(g)=\rho$. 由此可知 $\rho>0$.

3) 函数 $g(w)$ 把 D 变为圆 $|z|<\rho$. 命 D' 是 $z=g(w)$ 把 D 所映成的域，它一定包含在 $|z|<\rho$ 之内. 今往证 D' 就是圆 $|z|<\rho$. 假定 D' 有一边界点 ζ_0 适合于 $|\zeta_0|<\rho$，今将由此而推出类 C 中有一函数 $h(w)$ 使 $M(h)<\rho$. 这和 ρ 是 $M(g)$ 的下确界的假定相违背.

考虑函数

$$\zeta_1(\zeta)=\rho\sqrt{\frac{\rho(\zeta-\zeta_0)}{\rho^2+\bar{\zeta}_0\zeta}},$$

它在 D' 内有则，而且 $M(\zeta_1)=\rho$，取定一分支，作函数

$$\zeta_2(w)=\frac{\rho^2(\zeta_1-\zeta_1(0))}{\rho^2-\bar{\zeta}_1(0)\zeta_1},$$

则 $\zeta_2(w_0)=0$，$M(\zeta_2)=\rho$，$\zeta_2(w)$ 在 D 内有则，在 $w=w_0$ 时，其微商是 $\frac{\rho+|\zeta_0|}{2\sqrt{-\zeta_0\rho}}$，以此除 $\zeta_2(w)$，得 $\zeta_3(w)$，它属于 C 类，而

$$M(\zeta_3)=\rho\left|\frac{2\sqrt{-\zeta_0\rho}}{\rho+\sqrt{\zeta_0\bar{\zeta}_0}}\right|<\rho,$$

这与假定相违背.

在§1中所谈到的定理2，我们现在不加证明了.

§8. 第二系数的估计

定理1 (Cronwall). 命

$$w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

在 $|z| > 1$ 中是单叶的,而且处处有则,除去在无穷远点有一极点,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leqslant 1.$$

特别有 $|a_1| \leqslant 1$，仅当 $w = z + \frac{e^{i\alpha}}{z}$ 时,取等号.

证. (面积原理). 由于函数是单叶的，它将圆 $|z| = r > 1$ 变为 w 平面上的一条 Jordan 曲线,并包有正面积,在这曲线上命 $w = u(\theta) + iv(\theta)$，则

$$u(\theta) + iv(\theta) = re^{i\theta} + \frac{a_1}{re^{i\theta}} + \frac{a_2}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots\cdots,$$

命 $a_n = b_n + ic_n$，则

$$u(\theta) = r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta),$$

$$v(\theta) = r\sin\theta - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n\sin n\theta - c_n\cos n\theta).$$

Jordan 曲线所包围的面积 (>0) 等于

$$\int_0^{2\pi} u(\theta)v'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta)\right\}$$

$$\times\left\{r\cos\theta - \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n}(b_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta)\right\}d\theta$$

$$= \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-2n}(b_n^2 + c_n^2)\right) = \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2r^{-2n}\right).$$

即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2r^{-2n} < r^2,$$

当 $r \to 1$ 时得出所求证的不等式.

如果 $|a_1| = 1$，则显然有 $a_2 = a_3 = \cdots = 0$，即得所证.

引理1 (Faber). 假定

$$f(z) = z + a_2z^2 + \cdots\cdots$$

在单位圆内是有则及单叶的,命 $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$，则 $g(z)$ 也是 $|z| < 1$ 内的有则单叶奇函数.

证. 1) 有则性. 已知

$$f(z^2) = z^2(1 + a_2z^2 + \cdots),$$

括弧内的表示式是有则的偶函数,而且除 $z=0$ 外没有其他零点,因此

$$h(z)=\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=1+\frac{a_2}{2}z^2+\cdots$$

是有则的偶函数,而

$$g(z)=zh(z)=z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots,\quad |z|<1$$

是有则的奇函数.

2) 单叶性. 显然 0 只取一次,如果

$$g(z_1)=g(z_2)\quad 0<|z_1|<1,\ 0<|z_2|<1,$$

则

$$f(z_1^2)=(g(z_1))^2=(g(z_2))^2=f(z_2^2),$$

由此推得 $z_1^2=z_2^2$, 即 $z_1=\pm z_2$, 但

$$g(-z_1)=-g(z_1),\quad g(z_1)\neq 0,$$

故 $z_1=z_2$.

定理 2 (Bieberbach). 如果

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

在 $|z|<1$ 中有则且单叶, 则 $|a_2|\leqslant 2$, 当且仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}$ 时取等号 ($\theta\gtreqless 0$).

证. 由引理 1

$$\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots}=\frac{1}{z}-\frac{a_2}{2}z+\cdots$$

在 $0<|z|<1$ 内是有则单叶函数,应用定理 1 到函数 $\dfrac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$ 上得不等式 $|a_2|\leqslant 2$, 当且仅当 $\dfrac{1}{g(z)}=\dfrac{1}{z}+e^{i\theta}z$ 时取等式,即

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}.$$

附记. 读者自证,这函数确是单叶函数.

§9. 推 论

今后我们常设

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

在 $|z|<1$ 中有则且单叶.

定理 1 (Faber). 在 $|z|<1$ 中, $f(z)$ 取所有的绝对值小于 $\frac{1}{4}$ 的复数值,即 $w=f(z)$ 把 $|z|<1$ 变为一域,其中包有圆 $|w|<\frac{1}{4}$.

证. 假定 $f(z)\neq\gamma$，则函数

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/\gamma}=\frac{z+a_2z^2+\cdots}{1-z/\gamma+\cdots}=z+\left(a_2+\frac{1}{\gamma}\right)z^2+\cdots$$

在 $|z|<1$ 仍然是有则且单叶，由上节定理 2，可知

$$|a_2|\leqslant 2 \text{ 及 } \left|a_2+\frac{1}{\gamma}\right|\leqslant 2,$$

即得

$$\left|\frac{1}{\gamma}\right|\leqslant 2+|a_2|\leqslant 4,\quad |\gamma|\geqslant\frac{1}{4}.$$

附记 1. 易证，如果

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2},$$

则 $f(e^{-i\alpha})$ 取 $\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$，反之如果 $f(z)$ 在单位圆周上的值取 $\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$，$f(z)$ 一定是以上形式.

附记 2. 定理 1 的不等式可以换为

$$|\gamma|\geqslant\frac{1}{2+|a_2|}.$$

定理 2 (Beiberbach). 在 $|z|<1$ 中，

$$\left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}-\bar{z}\right|\leqslant 2,$$

当且仅当

$$f(z)=\frac{(z-z_0)(1-\bar{z}_0z)}{[(1-e^{i\alpha}z_0)+(\bar{z}_0-e^{i\alpha}z)]^2}$$

及 $z=z_0$ 时取等号.

证. 取 $|z_0|<1$，作

$$f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)=A_0+A_1z+A_2z^2\cdots,\quad A_0=f(z_0)$$

及

$$g(z)=\frac{1}{A_1}\left(f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)-A_0\right)=z+\frac{A_2}{A_1}z^2+\cdots,$$

$g(z)$ 仍然是单叶函数，因此

$$\left|\frac{A_2}{A_1}\right|\leqslant 2,$$

但

$$A_1=\frac{d}{dz}f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)\bigg|_{z=0}=f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)\frac{1-|z_0|^2}{(1+\bar{z}_0z)^2}\bigg|_{z=0}=f'(z_0)(1-|z_0|^2),$$

$$A_2=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)\bigg|_{z=0}=\frac{1}{2}\left(f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2-2f'(z_0)\bar{z}_0(1-|z_0|^2)\right).$$

由此得出所求证的不等式. 关于取等号的情况的证明不难，读者可自己证明.

§ 10. Koebe 之歪扭定理

定理 1 (Koebe). 当 $|z| = r < 1$ 时,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

当且仅当 $f(z) = \dfrac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}$ 时取等号.

证. 易见

$$\log f'(z) + \log(1-|z|^2) = \int_0^z \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2} \right) dz,$$

积分路线取由 0 到 z 的直线. 由上节定理 2 可知

$$|\log f'(z) + \log(1-|z|^2)| \leqslant \int_0^r \frac{4}{1-r^2} dr = 2\log\frac{1+r}{1-r}.$$

其实部给出

$$-2\log\frac{1+r}{1-r} \leqslant \log|f'(z)| + \log(1-r^2) \leqslant 2\log\frac{1+r}{1-r},$$

即得

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

何时取等号,读者自证.

附记. 取虚部得

$$|\arg f'(z)| = |I \log f'(z)| \leqslant 2\log\frac{1+r}{1-r}.$$

这不是最佳结果, Голузин 求得的最佳结果是

$$|\arg f'(z)| \leqslant \begin{cases} 4 \arcsin|z| & \text{当 } |z| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \log\dfrac{|z|^2}{1-|z|^2} & \text{当 } |z| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

由此立刻推得(用最大模原理)

定理 2. 在 $|z| \leqslant r$ 中不等式仍然成立.

定理 3. 假定 $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, 则

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4.$$

定理 4 (Bieberbach). 当 $|z| \leqslant r$ 时,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}.$$

(仍然如定理 1 的所指的情况取等号.)

证. 1) 由定理 1

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)dz\right| \leqslant \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|d\rho \leqslant \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho$$
$$= \int_0^r \left(\frac{2}{(1-\rho)^3} - \frac{1}{(1-\rho)^2}\right)d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

2) 假定 $w = f(z)$ 把圆 $C(|z| = r)$ 变为平面上的曲线 Γ，命 w_0 是 Γ 上离 0 最近的一点.

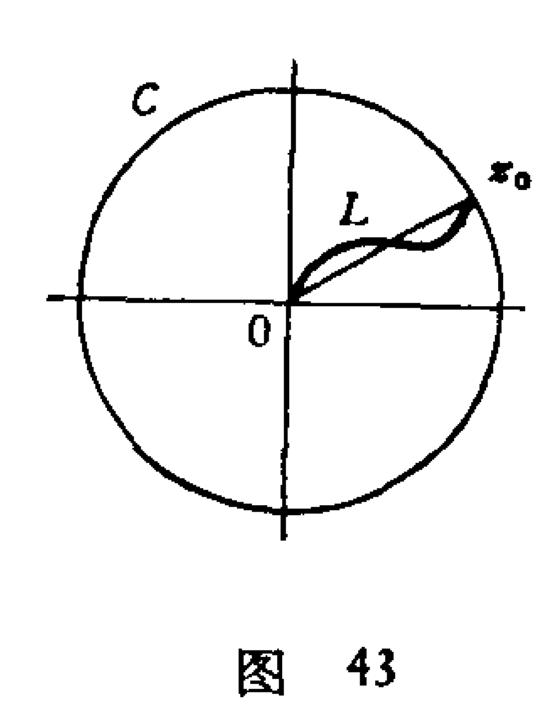


图 43

图 44

在 w 平面上作直线 $(w_0(0 \leqslant \rho \leqslant 1))$，在 z 平面对应的曲线是 L，如此则

$$|w_0| = \int_0^{w_0} |dw| = \int_L |f'(z)||dz|,$$

由于 $|dz| \geqslant d\lambda(|z| = \lambda)$，所以，由定理 1

$$|w_0| = \int_0^r |f'(\lambda e^{i\theta})|d\lambda \geqslant \int_0^r \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3}d\lambda = \frac{r}{(1+r)^2}.$$

由此立刻推出

定理 5. 在 $|z| = r$ 上，$|f(z)| \geqslant \frac{r}{4}$.

§ 11. Littlewood 的估计

定理 1 (Littlewood). 当 $n \geqslant 2$ 时，

$$|a_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} n < en.$$

证. 由 § 8 引理 1，

$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad b_1 = 1, \ |z| < 1$$

是有则单叶函数. 由上节定理 4，当 $|z| \leqslant t < 1$ 时，

$$|f(z)| \leqslant \frac{t}{(1-t)^2}.$$

故当 $|z| \leqslant \sqrt{t} < 1$ 时，

$$|g(z)| < \sqrt{\frac{t}{(1-t)^2}} = \frac{\sqrt{t}}{1-t},$$

即 $w = g(z)$ 把圆 $|z| = \sqrt{t}$ 变为一条 Jordan 曲线 Γ 在圆 $|w| = \frac{\sqrt{t}}{1-t}$ 之内，故 Γ

所包的面积不大于圆面积 $\pi\left(\frac{\sqrt{t}}{1-t}\right)^2=\frac{\pi t}{(1-t)^2}$.

Γ 所包的面积等于

$$\int_0^{2\pi} u(\theta)dv(\theta)=\int_0^{2\pi}\left[\sum_1^\infty (b_n'\cos n\theta-b_n''\sin n\theta)t^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$\times\left[\sum_1^\infty (b_n'\cos\theta-b_n''\sin n\theta)nt^{\frac{n}{2}}\right]d\theta$$

$$=\pi\sum_1^\infty n(b_n'^2+b_n''^2)t^n=\pi\sum_1^\infty n|b_n|^2t^n,$$

其中 $b_n=b_n'+b_n''i$. 即得

$$\pi\sum_1^\infty n|b_n|^2t^n\leqslant\frac{\pi t}{(1-t)^2},$$

$$\sum_1^\infty n|b_n|^2t^{n-1}\leqslant\frac{1}{(1-t)^2},$$

积分之,当 $0<r<1$ 时,

$$\sum_1^\infty |b_n|^2r^n\leqslant\int_0^r\frac{dt}{(1-t)^2}=\frac{r}{1-r}.$$

由于

$$\sum_1^\infty a_nr^n=\left(\sum_1^\infty b_nr^{\frac{n}{2}}\right)^2,$$

所以

$$|a_n|r^n=\left|\sum_{\nu=1}^{2n-1} b_\nu r^{\frac{\nu}{2}}b_{2n-\nu}r^{\frac{2n-\nu}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2n-1}(|b_\nu|^2r^\nu$$

$$+|b_{2n-\nu}|^2r^{2n-\nu})\left(\text{用了 } |ab|\leqslant\frac{|a^2|+|b|^2}{2}\right)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2n-1}|b_\nu|^2r^\nu\leqslant\sum_1^\infty|b_\nu|^2r^\nu,$$

故得

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{r^{n-1}(1-r)}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,取 $r=\frac{n-1}{n}$, 则得

$$|a_n|\leqslant\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n<en.$$

§12. 星 形 区

定义. 一个 Jordan 曲线所包的域称为对其中一点 z_0 是星形的, 如果由 z_0 向外的射线只交曲线于一点.

引理1. 如果 $w=g(z)$ 把圆 $|z|=r$ 变为相对 $w=0$ 的星形的曲线，则在 $|z|=r$ 上恒有

$$\boldsymbol{R} z\frac{g'(z)}{g(z)}>0,$$

并且反之亦真.

证. 以上所说即等价于 $g(re^{i\theta})$ 的辐角是 θ 的增函数，即

$$\frac{d}{d\theta}\boldsymbol{I}\log g(re^{i\theta})>0,$$

即

$$0<\boldsymbol{I}\frac{g'(z)}{g(z)}\frac{dz}{d\theta}=\boldsymbol{I}iz\frac{g'(z)}{g(z)}=\boldsymbol{R}z\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

引理2. 如果 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中有则，及

$$g(z)=\frac{1}{2}+b_1z+b_2z^2+\cdots,\ \boldsymbol{R}g(z)>0,$$

则 $|b_n|\leqslant 1$.

证. 命 $g(z)=u+iv$ 及 $b_n=b_n'+ib_n''$，则

$$u=\frac{1}{2}+\sum_1^\infty r^n(b_n'\cos n\theta-b_n''\sin n\theta),$$

此处

$$b_n=b_n'+b_n''i=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}ue^{-in\theta}d\theta,\ n\geqslant 1.$$

由于 $u>0$，所以

$$|b_n|\leqslant\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}ud\theta=\frac{1}{r^n}.$$

当 $r\to 1$，即得所求.

引理3. 设 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 把 $|z|<1$ 单叶地映为 w 平面上一对 $w=0$ 的星形区域，则在 $|z|<1$ 内处处有

$$\boldsymbol{R}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0.$$

证. 由引理1，我们只需证明对任一 $0<r<1$，$|z|<r$ 之象 B_r 亦是对于 $w=0$ 的星形域即可. 设 w 是 B 之一点，则当 $0<t<1$ 时，一切点 tw 皆属于 B. 因此函数 $f^{-1}[tf(z)]=\phi(z)$ 适合 $\phi(0)=0$，且在 $|z|<1$ 中是正则的，$|\phi(z)|\leq 1$，因此在 $|z|<1$ 有 $|\phi(z)|<|z|$ 设 $w_1=f(z_1)$ 是 Br 中的一点，即 $|z_1|<r$. 由上可知 $|f^{-1}(tw_1)|<|z_1|<r$，但 $tw_1\in B$，因此 $tw_1=f(z_0)$，$|z_0|<1$. 以此代入上面的不等式，得 $|z_0|<r$，即 $tw_1\in B_r$，引理证明.

又由调和函数的极值原理知，本引理的不等式在 $|z|<1$ 内不能取等号.

定理1 (R. Nevanlinna). 假定

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

在 $|z|<1$ 内有则且单叶，$w=f(z)$ 将单位圆变为相对于 $w=0$ 的星状域，则

$$|a_n|\leqslant n,\quad n=2,3,4\cdots,$$

(即在此特殊情况下，Bieberbach 猜想正确)且仅当 $f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$ 时取等号.

证. 由引理 3,

$$\boldsymbol{R}z\frac{f'(z)}{f(z)}>0,$$

故由引理 2 可知,

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=z\frac{1+2a_2z+\cdots}{z+a_2z^2+\cdots}=1+b_1z+\cdots+b_nz^n+\cdots,$$

$$|b_n|\leqslant 2.$$

即得

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ll 1+2z+2z^2+\cdots=\frac{1+z}{1-z},$$

(这儿用 $\Sigma a_nz^n\ll\Sigma b_nz^n$ 表示 $|a_n|\leqslant b_n$)

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}\ll\frac{2}{1-z},$$

即得

$$\log\frac{f(z)}{z}\ll\log\frac{1}{(1-z)^2},$$

$$\frac{f(z)}{z}\ll\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.$$

即得 $|a_n|\leqslant n$ (这儿我们用了由 $A(z)\ll B(z)$ 可推出

$$\int_0^z A(w)dw\ll\int_0^z B(w)dw,\quad e^{A(z)}\ll e^{B(z)}$$

等事实),关于等号部分不再证明.

§13. 实 系 数

定理 1 (Dieudonnè Rogosinski). 假定

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

在 $|z|<1$ 内正则且单叶,如果 a_n 都是实的,则

$$|a_n|\leqslant n,\quad n=2,3,4\cdots.$$

证. 由于 $f(z)$ 是单叶的,所以当 $0<r<1$, $\theta\neq 0$、π 时

$$f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})\neq 0,$$

即

$$r(e^{i\theta}-e^{-i\theta})+a_2r^2(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})+\cdots+a_nr^n(e^{ni\theta}-e^{-ni\theta})+\cdots\neq 0,$$

$$\sin\theta+a_2r\sin 2\theta+\cdots+a_nr^{n-1}\sin n\theta+\cdots\neq 0,$$

乘以 $\sin\theta$ 并利用 $\sin\theta\sin m\theta=\frac{1}{2}(\cos(m+1)\theta-\cos(m-1)\theta)$, 可得

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta)=1&+a_2r\cos\theta+(a_3r^2-1)\cos 2\theta+\cdots\\&+(a_{n+1}r^n-a_{n-1}r^{n-2})\cos n\theta+\cdots\neq 0\end{aligned}$$

$\psi(o, \theta)=1-\cos 2\theta>0$，所以常有

$$\psi(r, \theta)>0, \quad \theta \neq 0, \pi.$$

因此，函数

$$F(z)=1+a_2 r z+(a_3 r^2-1) z^2+\cdots+(a_{m+1} r^n-a_{n-1} r^{n-2}) z^n+\cdots$$

在 $|z|<1$ 上是正则的，且 $\boldsymbol{R}[F(z)] \geqslant 0$，由前节引理 2 知

$$|a_2 r| \leqslant 2, \ |a_3 r^2-1| \leqslant 2, \cdots, \ |a_{n+1} r^n-a_{n-1} r^{n-2}| \leqslant 2,$$

由此

$$|a_2| \leqslant \frac{2}{r}, \ |a_3| \leqslant \frac{3}{r^2}, \ |a_4 r^3-a_2 r| \leqslant 2,$$

$$|a_4| \leqslant \frac{2}{r^3}+\frac{|a_2|}{r^2}, \cdots,$$

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{2}{r^n}+\frac{|a_{n-1}|}{r^2} \leqslant \frac{2+|a_{n-1}| r^{n-2}}{r^n},$$

当 $r \rightarrow 1$ 时得

$$|a_n| \leqslant n.$$

§ 14. 把三角形变为上半平面

寻求一个函数 $w=g(z)$ 将 w 平面上以 $i\sqrt{3}, 0, 1$，为顶点的三角形内部变为 z 平面的上半平面．由 Riemann 定理可知一定有一一的保角变换把这三角形变为上半平面，且把 $(i\sqrt{3}, 0, 1)$ 变为实轴上三点 (a, b, c)，又有一实的 Möbius 变换把 (a, b, c) 顺次变为 $(-1, 0, 1)$．换言之：存在一函数 $w=g(z)$ 使 $i\sqrt{3}=g(-1)$，$0=g(0)$，$1=g(1)$．问题在于实际找出这个变换．考虑积分

$$w=c \int_0^z (t+1)^{-5/6} t^{-1/2}(1-t)^{-2/3} dt,$$

希望它合于我们的要求． 它确乎将 0 变为 0，当 z 沿实轴从 0 到 1 时，w 也从 0 沿实轴变到

$$c \int_0^1 (t+1)^{-5/6} t^{-1/2}(1-t)^{-2/3} dt=1,$$

图 45

今往算出

$$\frac{1}{c}=\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma(n+1)}(-t)^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)}(-1)^n=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} 2^{-1/2},$$

即函数

$$w=\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^z (t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt$$

把线段 $0\leqslant z\leqslant 1$ 变为 $0\leqslant w\leqslant 1$. 考虑当 z 在绕 1 跨过一个小的上半圆而从 **1** 变到 ∞时的情况，则 $(z-1)$ 变为 $(z-1)e^{-\pi i}$，因此

$$\begin{aligned}w&=\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left[\int_0^1 (t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt\right.\\&\qquad\left.+e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_1^x (t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(t-1)^{-2/3}dt\right]\\&=1+e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_1^x (t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(t-1)^{-2/3}dt,\end{aligned}$$

即 w 由 **1** 沿直线段 $1+e^{\frac{2\pi i}{3}}t$ 变到点

$$w_0=1+e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_1^\infty (1+t)^{-5/6}t^{-1/2}(t-1)^{-2/3}dt,$$

由于 $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=2$，这积分是收敛的.

再看当 z 绕 0 跨过一个小的上半小圆，而从 0 沿实轴变到 -1 的情况，此时 t 变为 $te^{\pi i}$，因此

$$\begin{aligned}w&=c\int_0^{-1}(t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt\\&=-c\int_0^1 (1-t')^{-5/6}(-t')^{-1/2}(1+t')^{-2/3}dt\\&=-e^{-\frac{i\pi}{2}}c\int_0^1 (1-t')^{-5/6}t'^{-1/2}(1+t')^{-2/3}dt'=i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\left(\text{此值由同法算出，但需用 } \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)$. 当 z 由 -1 变到 $-\infty$ 时，不难证出 w 由 $i\sqrt{3}$ 沿斜边变到 w_0.

因此，当 z 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时，w 正向地绕三角形一周. 同时在上半平面 $f(z)$ 是 z 的解析函数，因此 $z=f(w)$ 把三角形的内部变为上半平面.

更一般些，三角形 ABC 的三角各为

$$\angle A=\alpha\pi,\quad \angle B=\beta\pi,\quad \angle C=\gamma\pi,$$

则

$$w=k\int_{z_0}^z (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt,\quad a<b<c$$

把三角形内部变为上半平面，而且 A, B, C 三点变为 a, b, c，这儿的 k 与 z_0 可由

$$A = k\int_{z_0}^{a} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt$$

$$B = k\int_{z_0}^{b} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt$$

来决定，即由 $A - B = k\int_b^a (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt$ 定出 k 来，再由其中之一定出 z_0 来。

习题 1. $w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$ 把半平面变为等边三角形。

习题 2. $w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{5/6}t^{1/3}}$ 把半平面变为三角各为 30°, 30°, 120° 的三角形。

§ 15. Schwarz 反射原理

定理 1. 设 G_1, G_2 为两个互不相交的域。它们有一段共同的边界弧 C，设 C 为一 Jordan 曲线段，C 的任一内点都不是除 C 以外的 G_1 或 G_2 的其它边界点的聚点。又设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 分别为 G_1 及 G_2 内的解析函数，在 $G_1 + C$ 及 $G_2 + C$ 上连续，且在 C 上有 $f_1(z) = f_2(z)$，则存在一个在 $G_1 + G_2 + C$ 解析的函数 $F(z)$，它在 G_1 等于 $f_1(z)$，在 G_2 等于 $f_2(z)$。

证. 我们定义 $G_1 + G_2 + C$ 上的单值连续函数 $F(z)$ 为

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & 当\ z \in G_2; \\ f_2(z), & 当\ z \in G_2; \\ f_1(z) = f_2(z), & 当\ z \in C. \end{cases}$$

现在来证明 $F(z)$ 是解析函数，当 z 属于 G_1 或 G_2 时这是显然的，现设 z 属于 C，但作一可度长的闭围路 g 横跨 G_1, G_2（见 46 图）。考虑积分

$$\int_g F(z)dz. \tag{1}$$

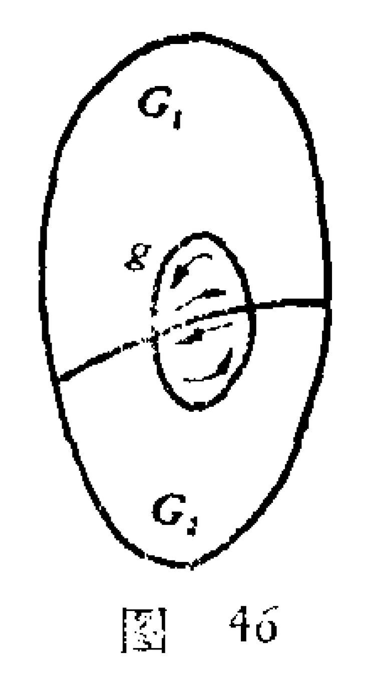


图 46

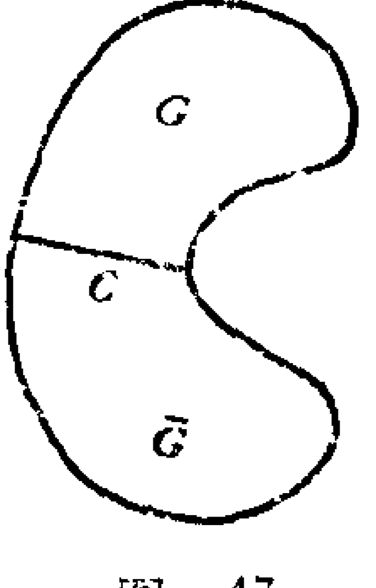


图 47

把这积分分解为两个积分，一个在 G_1 内一个在 G_2 内（见 46 图），由于 $f_1(z), f_2(z)$ 在 G_1+C 及 G_2+C 上的连续性，这两个积分都等于零，因之积分 (1) 也等于 0，根据 Morera 定理，$F(z)$ 是一解析函数。

定理 2 (Schwarz 反射原理). 设域 G 位于上半平面，它的边界含有实轴上的一个线段（区间）C，C 具有和定理 **1** 的弧段 C 同样的性质，设 $f(z)$ 在 G 解析在 $G + C$ 上连续，

且在 C 上只取实值，则 $f(z)$ 可经 C 向 G 外作解析延拓(见图 47)。

证．把 G 对实轴作反射，得另一区域 $\bar{G}$，在 $\bar{G}$ 上函数

$$f(z)=\overline{f(\bar{z})}$$

是有定义且解析的，$g(z)$ 在 $\bar{G}+C$ 上连续，且在 C 上有 $g(z)=f(z)$．由定理 1 立可推出本定理．

习题．如果定理 2 中 $f(z)$ 在 C 上不取实值，但 $f(z)$ 在 C 上所取的值都落在复平面上某一直线段 $\overline{AB}$ 上(即 $f(z)$ 把 c 连续地映为 $\overline{AB}$)，如何推出类似的结果？

§ 16. 把四边形变为上半平面

命 $0<k<1$，考虑积分

$$w=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

当 z 沿实轴由 0 变到 1，则

$$w=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

也沿实轴由 0 变到

$$K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

当 z 沿实轴由 1 变到 $\frac{1}{k}$，则

$$w=K+i\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

沿直线 $u=K$，从 K 变到 $K+iK'$，这儿

$$K'=\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}},$$

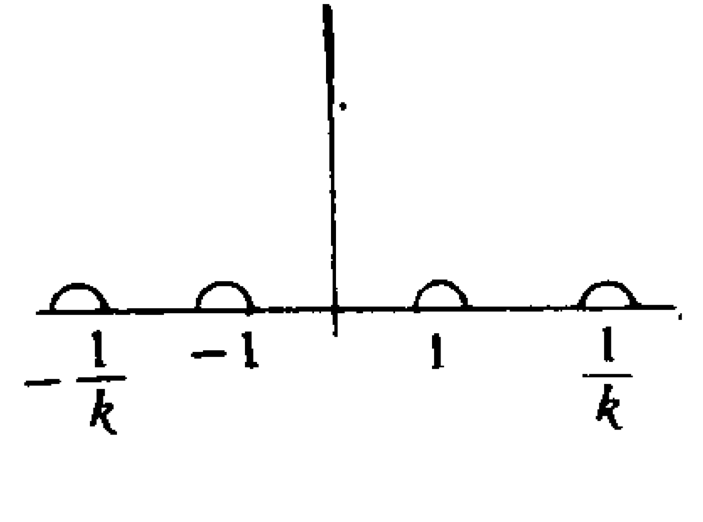


图 48

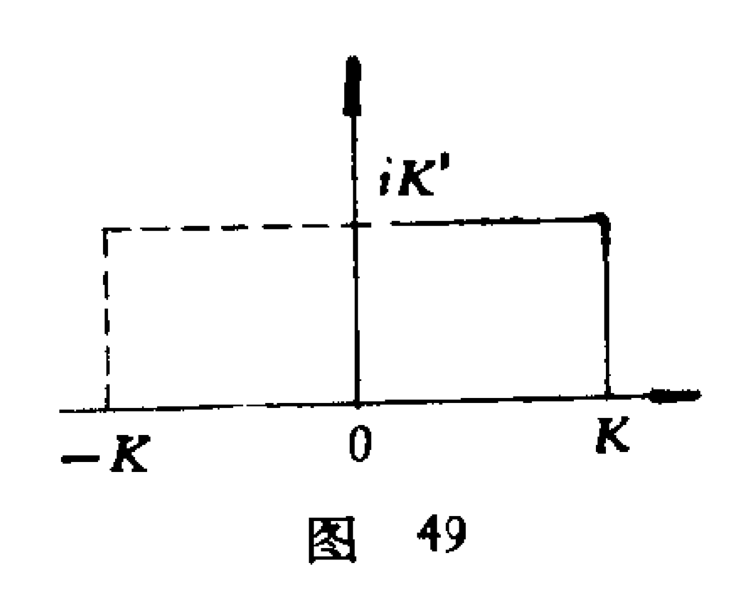


图 49

再当由 $\frac{1}{k}$ 变到 ∞，则

$$w=K+iK'-\int_{1/k}^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}$$

沿直线 $v=K'$，由 $K+iK'$ 变到 iK'，这儿用了

$$\int_{1/k}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}=K,$$

要证明此点并不困难，换变数 $kt=\frac{1}{\tau}$ 即得.

再考虑当 z 过实轴负向部分，同法可证当 z 沿实轴，由 0 而 -1，而 $\frac{-1}{k}$ 而 $-\infty$，则 w 由 0 变到 $-K$，而 $-K+iK'$ 而 iK'.

总之，当 z 由 $-\infty$ 到 ∞ 时$\left(\text{但须注意 } -\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k} \text{ 诸点处都必须作一上半小圆，沿小圆过去}\right)$，则 w 过一长方形的边界，其边长各为 $2K$ 及 iK'，因之将上半面变到长方形

$$K, K+iK', -K+iK', -K.$$

函数

$$w=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

并不能用初等函数表示出来．它是一个所谓椭圆积分．它的反函数是 Jacobi 的椭圆正弦

$$z=\operatorname{sn} w=\operatorname{sn}(w;k),$$

它把矩形

$$[K, K+iK', -K+iK', -K]$$

$$\left(K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ K'=\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\right)$$

变为上半平面.

能不能找到这样的变换，把任意长宽的矩形变为上半平面，即给了 $L(>0)$，$M(>0)$，能否找到 C 与 k，使

$$L=CK,\ M=CK',$$

即求 k 使

$$\frac{M}{L}=\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\Bigg/\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\varphi(k),$$

$\varphi(k)$ 在 $0<k<1$ 中是 k 的连续函数，而且

$$\lim_{k\to 1}\varphi(k)=0,\quad \lim_{k\to 0}\varphi(k)=\infty.$$

因此任给 $\frac{M}{L}$，一定有 k 存在，找到 k 后，再定出 C 来，即得所需的变换.

附记．$z=\operatorname{sn} w$ 在全平面上的情况，当 w 在实轴上 $[-K, K]$ 之间时，z 在实轴上 $[-1, 1]$ 之间，由 Schwarz 反射原理，可知这函数可以解析延拓到矩形

$$[-K, -K-iK', K-iK', K]$$

之中，其中的数值对应于 z 的下半平面.

又线段 $[K, K+iK']$ 对应于 $\left(1, \frac{1}{k}\right)$，因此再由 Schwarz 原理可以拓展到矩形 $[K, 3K, 3K+iK, K+iK']$ 之中．不难证明

$$\operatorname{sn}(w+4K)=\operatorname{sn} w,$$
$$\operatorname{sn}(w+2K'i)=\operatorname{sn} w,$$

即 $\operatorname{sn} w$ 是一个有两周期 $2K'i$ 与 $4K$ 的函数．不但如此，除去 $w=iK'$ 及 $iK'+2K'im+4Kn$ 之外，它无处不解析.

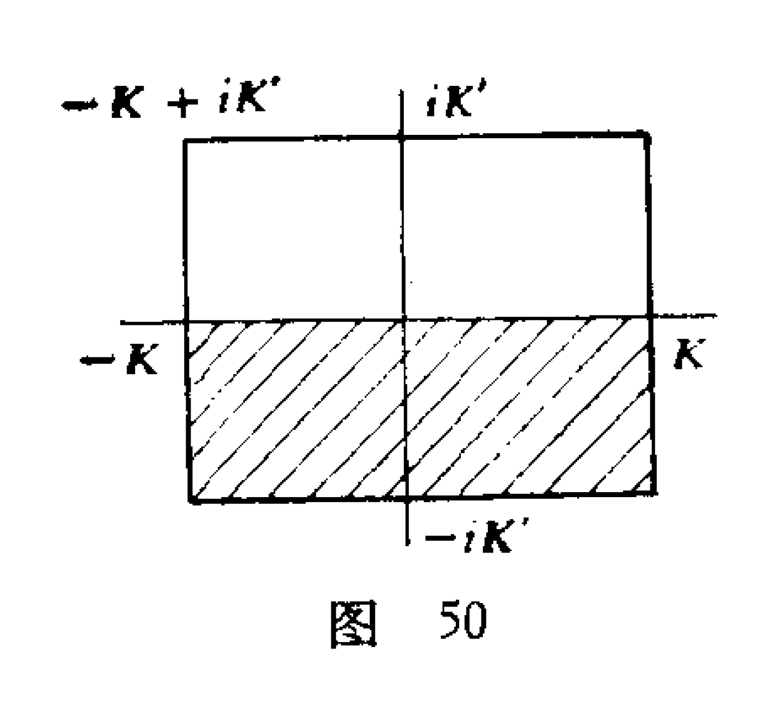


图 50

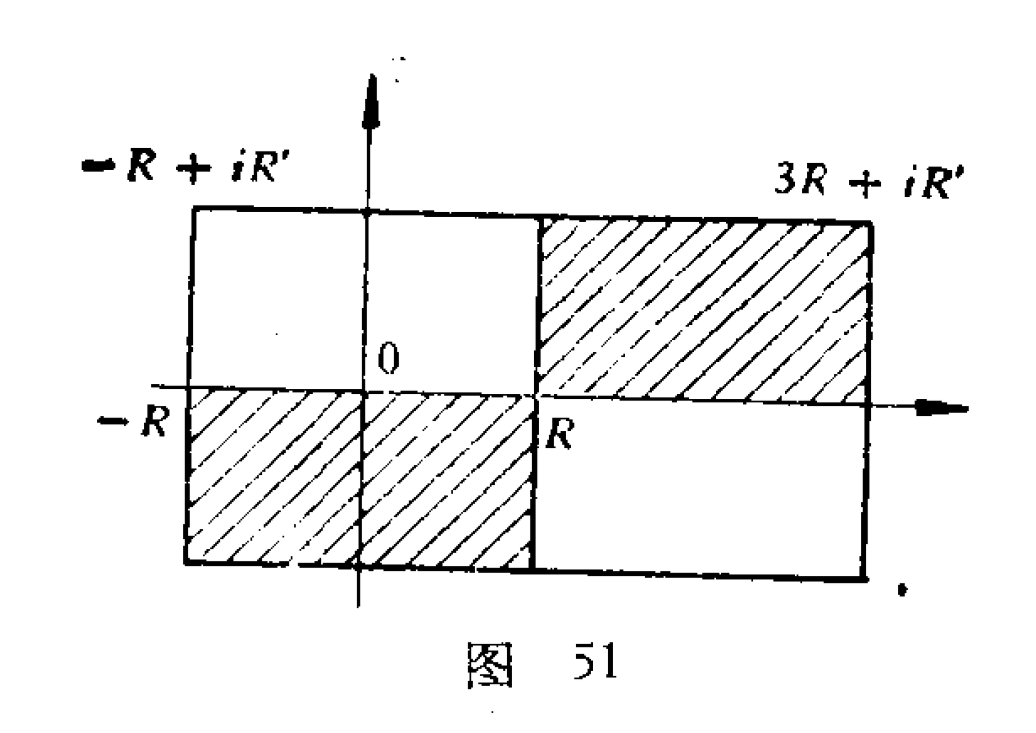


图 51

习题 1. 用 Schwarz 反射原理,求出 § 14 所定义的函数的反函数的全平面性质. 并证明,这函数也是有两个周期的. 它的周期是 $4w+2w'$, $2w+4w'$, 这儿

$$w, w' = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$$

(如图 52).

习题 2. 函数

$$w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

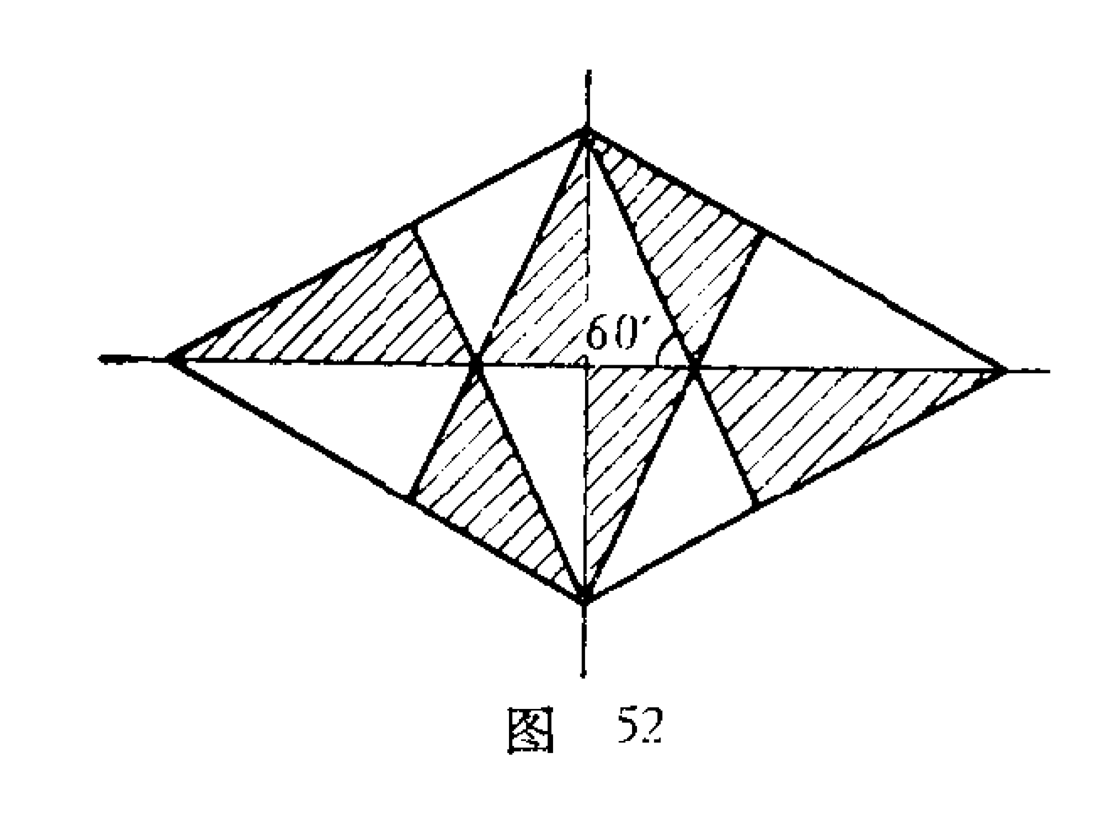


图 52

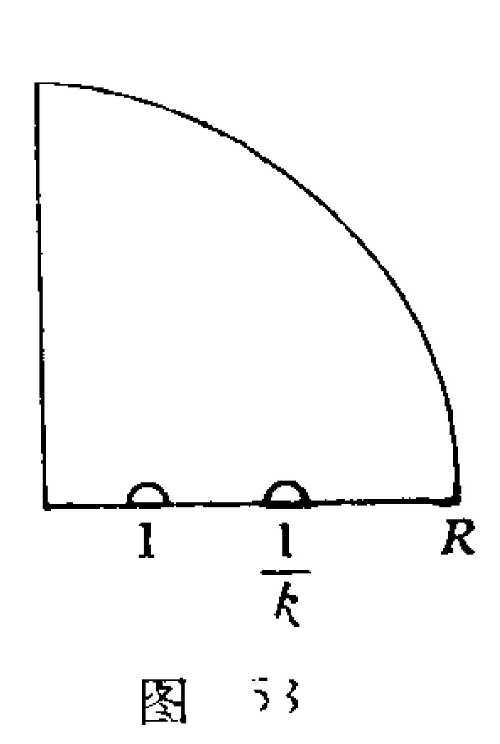


图 53

把 z 平面上的单位圆变为 w 平面上的方块(命 $z=(\zeta-i)/(\zeta+i)$).

习题 3. 证明

$$\int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}.$$

(提示: 考虑如图 53 的迴道.)

§ 17. Schwarz-Christoffel 法——把多边形变为上半平面

更一般考虑积分

$$w = c\int_{-\infty}^{z} (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt + c_1, \tag{1}$$

这儿

$$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n < \infty,$$

及

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = n-2, \quad 0 < \alpha_\nu < 1, \ \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

c 与 c_1 是常数. 我们考虑当 z 沿实轴由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时, w 的变化怎样 (当然当过 a_1,

$a_2, \cdots, a_n$ 时,作一个上半小圆绕过可能的奇异点 a_i).

首先由于当 $t \to \infty$ 时,

$$(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1} = O(|t|^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n-n}) = O(|t|^{-2}),$$

故积分 (1) 是收敛的,而且当 t 沿上半小圆

$$t = a_\nu + \varepsilon e^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ \varepsilon > 0$$

而积分时,这积分

$$O(\varepsilon^{\alpha_\nu}) = o(1).$$

当 z 在整个上半平面,积分 (1) 是解析的单值的.

先考虑

$$w = \int_{-\infty}^{z} (t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt \tag{2}$$

(即 $c=1$, $c_1=0$ 的情况). 当 z 沿实轴从 $-\infty$ 变到 a_1 时,

$$w = e^{\pi i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n-n)}\int_{-\infty}^{x}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt,$$

w 沿实轴由 0 变到

$$A_1 = \int_{-\infty}^{a_1}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt,$$

当 z 经上半小圆绕 a_1 后,再沿实轴由 a_1 变到 a_2 时, w 由 A_1 变到

$$A_2 = A_1 + e^{-(\alpha_1-1)\pi i}B_1.$$

更具体些,当 z 由 a_1 变到 a_2 时, w 画一线段

$$w = A_1 + e^{-(\alpha_1-1)\pi i}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant B_1,$$

这儿

$$B_1 = \int_{a_1}^{a_2}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(a_2-t)^{\alpha_2-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt.$$

同样,当 z 由 a_2 变到 a_3 时, w 画一线段

$$w = A_2 + e^{-(\alpha_1+\alpha_2-2)\pi i}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant B_2,$$

而

$$B_2 = \int_{a_2}^{a_3}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}(a_3-t)^{\alpha_3-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt.$$

命

$$A_3 = A_2 + e^{-(\alpha_1+\alpha_2-2)\pi i}B_2,$$

现在考虑线段 $\overline{A_1B_2}$ 与 $\overline{A_2A_3}$ 的夹角,由于 $\overline{A_1A_2}$ 及 $\overline{A_2A_3}$ 与 x 轴的斜角各等于 $-(\alpha_1-1)\pi$, $-(\alpha_1+\alpha_2-2)\pi$, 故 $\overline{A_1A_2}$ 与 $\overline{A_2A_3}$ 的夹角等于 $\alpha_2\pi$.

依法续行, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 各对应于 w 平面上的

$$A_1, A_2, \cdots, A_n,$$

而且 $\overline{A_{\nu-1}A_\nu}$ 与 $\overline{A_\nu A_{\nu+1}}$ 的夹角是 $\alpha_\nu\pi$. 最后,当 z 由 a_n 变形 ∞ 时, w 沿直线

$$w = A_n + t, \quad 0 \leqslant t \leqslant B_n$$

从 A_n 变到 $A_n + B_n$, 这儿

$$B_n=\int_{a_n}^{\infty}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt.$$

今往证明: $A_n+B_n=A_1$, 也就是待证

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt=0,$$

当然积分路线过 $a_1,\cdots,a_n$ 需过一小半圆.

图 54

由于被积函数在上半平面有则,画一以 R 为半径的大圆,上半平面的积分

$$=O(R^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-n+1})=O(R^{-1}),$$

故当 $R\to\infty$ 时,积分趋于 0, 利用 Cauchy 积分定理,立得所证.

因此,当 z 由 $-\infty$ 变到 ∞ 时, w 画一 n 边形,以

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

为顶点, A_ν 的角度等于 $\alpha_\nu\pi$.

由 § 6 定理 1, 可知 (2) 把上半平面变为 n 角形, 同样 (1) 把上半平面变为 n 角形, 它的 n 个顶点是

$$A_\nu=c\int_{-\infty}^{\alpha_\nu}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+c_1$$

在 A_ν 处的角度是 $\alpha_\nu\pi$.

习题. 怎样的 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$$w=\int_{-\infty}^{z}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}(t-a_3)^{\alpha_3-1}dt$$

的反函数 $z=f(w)$ 才在整个 w 平面是单值函数,试证仅有三种可能性,即其三角形三角的度数各为

$$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right).$$

提示: 绕一点用 Schwarz 反射原理偶数次后回到原来的所在, 因此 $\alpha_i=\frac{1}{a_i}$, 这儿 a_i 是自然数,又有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, 因此仅当

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1,\quad a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant 2$$

时,有此可能.

§ 18. 续

现在证明把上半平面变到多边形的一一保角映照,一定是上节中所讲的形式.

首先,由 Riemann 基本定理,必有函数 $w=f(z)$ 把上半 z 平面保角且一一地映照到多边形的内部 Δ 上去,我们约定: z 平面实轴上三点 (例如 a_1,a_2,a_3) 与 Δ 的边界上的三点(例如三项点 A_1,A_2,A_3) 相对应, 由 § 1 引言中所述的定理 2, $f(z)$ 唯一地决定了, 这函数把顶点 $A_4,\cdots,A_n$ 变为 x 轴上的 $n-3$ 个点 $a_4,\cdots,a_n$, 现在来找出这函数的解析表达形式.

当 z 在实轴的每一段 (a_k, a_{k+1}) 上，$w=f(z)$ 画一线段 A_kA_{k+1}，由 Schwarz 对称原理，可以把这函数经这线段解析延拓到下半平面内去，这函数的解析延拓作出一保角映照，它把下半个平面映到依线段 A_kA_{k+1} 对称，Δ 的影子上去，它的影子是多边形 Δ'，这解析延拓又可以经任一线段 $(a_{k'}, a_{k'+1})$ 而被延拓到 z 的上半平面上来，这样的解析延拓所作出的保角映照，把上半 z 平面映到依 $A_{k'}A_{k'+1}$ 对称，Δ' 的影子 Δ'' 上去.

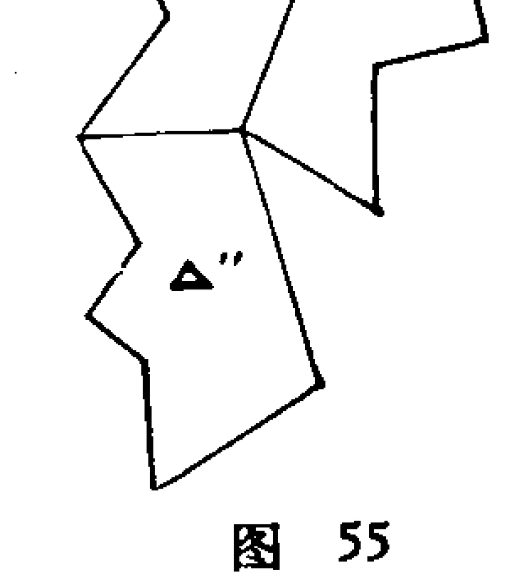


图 55

假定我们已经完成了一切可能的象上面所说的那样的解析延拓，一般说来，结果将是一个多值函数(可能是无限个值的函数) $w=F(z)$. 对这函数来说，原来的 $f(z)$ 是它在上半平面内的一个单值分支.

假定 $w=f^*(z)$ 与 $w=f^{**}(z)$ 是函数 $F(z)$ 在上半平面的任意两个分支按照 $F(z)$ 的构成方式，由 f^* 到 f^{**} 是经过偶数次对称(反射)而来的，对任意两直线各作一次反射得一 Euclid 变换，即偶数次对称结果是

$$f^{**}(z)=e^{i\alpha}f^*(z)+a,$$

对下半平面来说这结论也是正确的.

考虑函数

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{d}{dz}\log f'(z),$$

由于在上半平面 $f(z)$ 是一一的保角映射，所以 $f'(z)$ 在上半平面 $\neq 0$，因此 $g(z)$ 在上半平面是解析的，又由

$$f^{**\prime}(z)=e^{i\alpha}f^{*\prime}(z),$$
$$f^{**\prime\prime}(z)=e^{i\alpha}f^{*\prime\prime}(z),$$

所以 $g(z)$ 是单值的，对下半平面可作同样的讨论. 因此在整个 z 平面上，除 $z=a_k$ 之外，$g(z)$ 无处不解析，而是单值函数. 由于 $z=\infty$ 变为多角形边上的某一点，而非顶点，因此 $g(z)$ 在无穷远点也是解析的.

我们现在看 $g(z)$ 在 $z=a_k$ 处的性质，取一个分支 $f(z)$，则在 $z=a_k$ 附近

$$f(z)=A_k+(z-a_k)^{\alpha_k}\{c_0+c_1(z-a_k)+\cdots\}. \tag{1}$$

要证明此点可以考虑

$$(f(z)-A_k)^{1/\alpha_k}=\omega(z),$$

当 z 绕 a_k 画上半个小圆时 $f(z)$ 绕 A_k 画 $\alpha_k\pi$ 因此，当 z 通过 a_k 的直线时，$a(z)$ 过一经过 A_k 的直线段. 由对称原理 $\omega(z)$ 可以展为

$$\omega(z)=c_1(z-a_k)+c_2(z-a_k)^2\cdots\cdots,$$

因而得出表达式 (1) 来.

由 (1) 推得，在 $z=a_k$ 附近

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{(\alpha_k-1)\alpha_kc_0(z-a_k)^{\alpha_k-2}+\cdots}{\alpha_kc_0(z-a_k)^{\alpha_k-1}+\cdots}$$
$$=\frac{\alpha_k-1}{z-a_k}+c_0'+c_1'(z-a_k)+\cdots,$$

即 $g(z)$ 有一一阶极点，留数为 $\alpha_k-1(\alpha_k\neq 1)$.

在整个平面上 $g(z)$ 有 n 个奇点，

$$G(z)=g(z)-\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}-\cdots-\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}$$

是一个在整个平面上解析的函数(包括∞),因此它是一常数.

又由于 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处是有则的,

$$f(z)=d_0+\frac{d_{-p}}{z^p}+\frac{d_{-p-1}}{z^{p+1}}+\cdots$$

及

$$g(z)=\frac{p(p+1)\frac{d_{-p}}{z^p}+\cdots}{-\frac{pd_{-p}}{z^{p+1}}+\cdots}=-\frac{p+1}{z}+\frac{d_2'}{z^2}+\cdots.$$

于是 $g(\infty)=0$,故 $G(\infty)=0$,因此 $G(z)\equiv 0$,

$$g(z)=\frac{d}{dz}\log f'(z)=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n},$$

沿上半平面中任一路线积分可得

$$f'(z)=c(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}, \tag{2}$$

即得所求函数的形式是

$$f(z)=c\int_{-\infty}^{z}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+c_1, \tag{3}$$

也就是上节所讲的变形是必然的形式.

附记. 由(2)可知,当 $z=x>a_n$ 时,

$$\arg f'(z)=\arg c,$$

线段 (a_n,a_1) 经 $w=f(z)$ 而变为 A_nA_1,因此 $\arg c$ 等于线段 A_nA_1 与 x 所成的角度.

给出了一个顶点的位置可以确定 c_1,要确定 a_k 与 $|c|$ 可以利用已知多边形的边长

$$\overline{A_kA_{k+1}}=|c|\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f'(x)|dx,\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

来决定,因此在实际使用 Schwarz-Christoffel 公式时,我们要解超越联立方程组,这可以用多变数牛顿法来寻求其数值解.

§19. 补　　充

以下一些结果我们不加证明:

1° 多边形有一顶点是 $a_n=\infty$ 的象,则映照函数为

$$w=c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}dz+c_1.$$

2° 多边形有一个或几个顶点在无穷远处.

Schwarz-Christoffel 公式仍然有意义,但要把无穷远处的顶点的角度理解为夹这顶的两边的夹角的反向,即如图 56 所示.

3° 把多边形外部变为上半平面,假定它把∞变为 a,则

$$w=c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\times\frac{dz}{(z-a)^2(z-\bar{a})^2}+c_1.$$

4° 把单位圆内部映到多边形内部上去的映射

$$w = c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz + c_1,$$

这儿 a_k 是单位圆上的对应于多边形顶点的点.

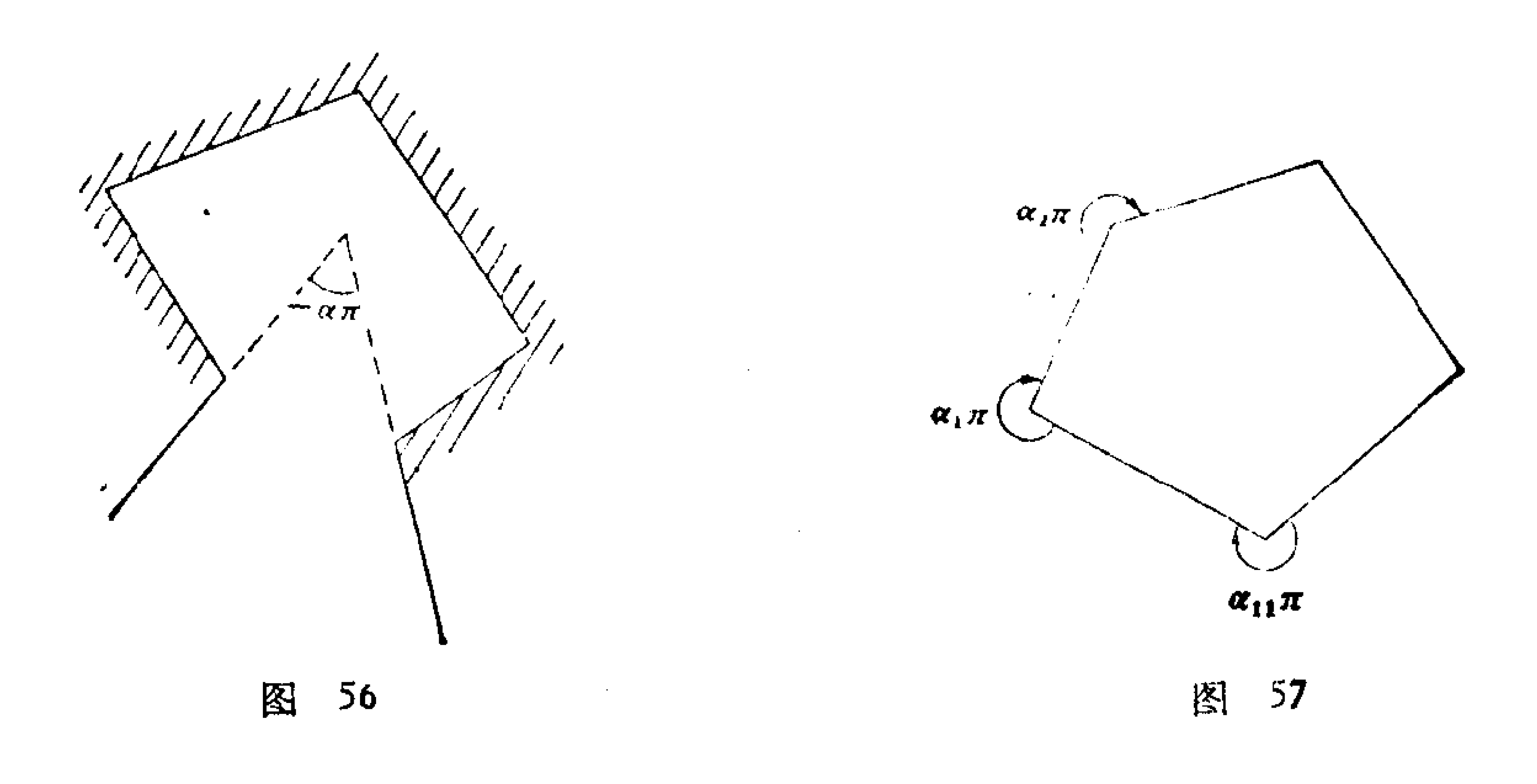


图 56　　图 57

第十一章 求 和 法

§1. Cesáro 求和法

定义. 命 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为一个复数贯,而且命

$$
\begin{aligned}
s_n^{(0)} &= a_0 + \cdots + a_n, \\
s_n' &= s_0^{(0)} + \cdots + s_n^{(0)}, \\
s_n'' &= s_0' + \cdots + s_n', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_n^{(k)} &= s_0^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k! s_n^{(k)}}{n^k} \to s, \tag{1}$$

则级数

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

称为在 Cesáro 的意义下可 k 级求和,其和是 s,或简称为级数 (2) 可 (c, k) 求和,或 (c, k) 和等于 s,或记之为

$$a_0 + \cdots + a_n + \cdots = s, \quad (c, k).$$

命

$$c_n^{(k)} = \frac{k! n!}{(n+k)!} s_n^{(k)},$$

则 (1) 与

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(k)} = s \tag{3}$$

等价.

定理 1. 如果一级数的 (c, k) 和等于 s,则 $(c, k+1)$ 和也等于 s.

证. 由

$$s_n^{(k)} = s\frac{n^k}{k!} + o(n^k),$$

可得

$$
\begin{aligned}
s_n^{(k+1)} &= \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(k)} = \frac{s}{k!}\sum_{\nu=0}^{n} \nu^k + o\left(\sum_{\nu=0}^{n} \nu^k\right) = \frac{s}{k!}\left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + o(n^{k+1})\right) \\
&\quad + o(n^{k+1}) = \frac{sn^{k+1}}{(k+1)!} + o(n^{k+1}).
\end{aligned}
$$

特例是 c^0 和就是普通的收敛,因此一级数如果收敛,其极限是 s,则任何次 Cesáro 和也是以 s 为其极限.

定理 2. 如果级数 (2) (c, k) 可求和,则

$$a_n = O(n^k).$$

证. 由定义

$$s_n^{(k)} = s\frac{n^k}{k!} = o\left(\frac{n^k}{k!}\right) = O(n^k),$$

因此得

$$s_n^{(k-1)} = s_n^{(k)} - s_{n-1}^{(k)} = O(n^k) + O(n^k) = O(n^k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及

$$s_n^{(0)} = O(n^k),$$
$$a_n = O(n^k).$$

定理 3. 命 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 如果 (2) (c, k) 可求和,则

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = s.$$

证. 由定理 2 可知,当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

收敛,并有

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(0)} x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} s'_n x^n = \cdots = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n. \quad (4)$$

现在

$$s_n^{(k)} = s\binom{n}{k} + o\binom{n}{k},$$

即对任一 $\delta > 0$, 当 $n \geqslant n_0(\delta)$ 时,

$$\left| s_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| < \delta \binom{n}{k}.$$

因此,当 $0 < x < 1$ 时,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left| s_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| x^n$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| s_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| x^n + \delta \sum_{n=n_0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| s_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| x^n + \delta \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n,$$

即得

$$\overline{\lim_{x\to 1}} \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n} \leqslant \delta.$$

(注意当 $x \to 1$ 时，分母变为∞.)因此，当 $x \to 1$ 时，

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n} \to 0. \tag{5}$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$= \frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

(5) 式分子分母同乘以 $(1-x)^{k+1}$，则得

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - sx^k}{x^k} = 0,$$

即

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = s.$$

例 1.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}, (c, 1).$$

例 2.

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}, (c, 2).$$

但这级数并不 $(c, 0)$ 收敛.

§ 2. Hölder 求和法

定义. 命 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 是一复数贯，命

$$h_n^{(0)} = a_0 + \cdots + a_n,$$
$$h_n' = \frac{h_0^{(0)} + \cdots + h_n^{(0)}}{n+1},$$
$$h_n'' = \frac{h_0' + \cdots + h_n'}{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$h_n^{(k)} = \frac{h_0^{(k-1)} + \cdots + h_n^{(k-1)}}{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即逐步求平均值. 如果

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = s, \tag{1}$$

则级数

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

称为在 Hölder 意义下可 k 级求和，其和为 s，或简称为 (2) 可 (H, k) 求和，(H, k) 和等于 s，或记之为

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, (H, k),$$

或和 s 为贯 $h_n^{(0)}$ 的 (H, k) 极限.

现在也有(并且较易)与 § 1 定理 1, 2, 3 相仿的结果,即

定理 1. 如果 (2) 的 (H, k) 和等于 s, 则 $(H, k+1)$ 和也是 s.

(由于如果 $h_n^{(k+1)} \to s$, 则 $h_n^{(k+1)}$ 的平均值也 $\to s$.)

定理 2. 如果 (2) (H, k) 可求和,则 $a_n = O(n^k)$,

证. 由 $h_n^{(k)} \to s$, 可知

$$h_n^{(k)} = O(1),$$
$$h_n^{(k-1)} = (n+1)h_n^{(k)} - nh_{n-1}^{(k)} = O(n) + O(n) = O(n),$$
$$h_n^{(k-2)} = (n+1)h_n^{(k-1)} - nh_{n-1}^{(k-1)} = O(n^2) + O(n^2) = O(n^2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以及

$$h_n^{(1)} = o(n^k),$$
$$a_n = h_n^{(0)} - h_{n-1}^{(0)} = o(n^k).$$

定理 3. 如果 (2) (H, k) 可求和,则

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = s.$$

这定理我们将不再证明,因为它是以下定理 4 与上节定理的直接推论.

定理 4 (Knopp-Schnee). 对一固定的自然数 k, 如果

$$c_n^{(k)} \to s,$$

则

$$h_n^{(k)} \to s.$$

而且反之亦真.

换言之, Cesáro 求和法与 Hölder 求和法是等价的.

在证明这定理之前,在下节先证两条引理.

习题. 研究以下级数的求和问题

$$1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots.$$

§ 3. 与均值有关的两条引理

引理 1. 假定 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是一个复数贯, q 是正整数,并假定

$$x_n + q\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0, \tag{1}$$

则

$$x_n \to 0. \tag{2}$$

证. 简书

$$y_n = q(x_1 + \cdots + x_n) + nx_n = q(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + (n+q)x_n, \tag{3}$$

则有恒等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)=(n+1)(n+2)\cdots(n+q)\sum_{\nu=1}^{n} x_n. \tag{4}$$

当 $n=1$ 时,这恒等式

$$y_1\cdot 2\cdots q=2\cdot 3\cdots(q+1)x_1$$

就是(3)在 $n=1$ 时的特例. 假定(4)对 $n-1$ 时成立,而往证对 n 成立. 由归纳假定及(3)可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)\\
&\quad=\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)+y_n(n+1)\cdots(n+q-1)\\
&\quad=n(n+1)\cdots(n-1+q)\sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu+[q(x_1+\cdots+x_{n-1})\\
&\qquad+(n+q)x_n](n+1)\cdots(n+q-1),
\end{aligned}$$

即得所证.

由(1)可知, $y_n=o(n)$, 即

$$y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)=o(\nu^q).$$

故

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)=o\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^q\right)=o(n^{q+1}).$$

由恒等式得

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu=\frac{1}{(n+1)\cdots(n+q)}o(n^{q+1})=o(n),$$

$$nx_n=y_n-q\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu=o(n)+o(n)=o(n),$$

即

$$x_n=o(1).$$

引理 2. 假定 k 是正整数及

$$\frac{1}{k}x_n+\frac{k-1}{k}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\to\gamma,$$

则

$$x_n\to\gamma.$$

证. 命 $x_n-\gamma=z_n$, 则由假定推得

$$\frac{1}{k}z_n+\frac{k-1}{k}\frac{z_1+\cdots+z_n}{n}\to 0,$$

即

$$z_n+(k-1)(z_1+\cdots+z_n)/n\to 0.$$

由引理 1 可知

$$z_n\to 0,$$

即

$$x_n \to \gamma.$$

§ 4. (C, k) 与 (H, k) 等价性的证明

给了一个复数贯

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

用 $M(x_n)$ 代表由算术平均所得出的数贯

$$x_0, \frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3}, \cdots, \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}, \cdots.$$

对任意二常数 a, b, $aM(x_n) + bx_n$ 代表数贯

$$ax_0 + bx_0, a\frac{x_0 + x_1}{2} + bx_1, \cdots, a\frac{x_0 + \cdots + x_n}{n+1} + bx_n.$$

算子 $y_n = aM(x_n) + bx_n$ 把数贯 $\{x\}$ 变为数贯 $\{y\}$,

$$y_n = \frac{a}{n+1}x_0 + \cdots + \frac{a}{n+1}x_{n-1} + \left(\frac{a}{n+1} + b\right)x_n.$$

这是 $\{x\}$ 的更一般形式的算子的特例:

$$\begin{aligned}
&y_0 = c_{00}x_0,\\
&y_1 = c_{10}x_0 + c_{11}x_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_n = c_{n0}x_0 + c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nn}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

如果有一这样性质的算子由 $\{x\}$ 到 $\{y\}$, 另一由 $\{y\}$ 到 $\{z\}$, 则连续运算仍然得一个算子由 $\{x\}$ 到 $\{z\}$, 称为上述算子的乘积, 这样的算子适合结合律, 一般并不适合交换律, 但两个算子

$$aM(x_n) + bx_n, \quad a'M(x_n) + b'x_n$$

则是可以交换的:

$$\begin{aligned}
&a'M(aM(x_n) + bx_n) + b'(aM(x_n) + bx_n)\\
&\quad = aa'MM(x_n) + (a'b + b'a)M(x_n) + b'bx_n,\\
&aM(a'M(x_n) + b'x_n) + b(a'M(x_n) + b'x_n)\\
&\quad = a'aMM(x_n) + (ab' + ba')M(x_n) + bb'x_n,
\end{aligned}$$

二者相等.

对正整数 k, 我们特别定义

$$T_k(x_n) = \frac{k-1}{k}M(x_n) + \frac{1}{k}x_n,$$

故 T_k 与 M 可交换, 因此任二 T_k, T_l 是可交换的.

由 $x_n \to s$ 可知

$$T_k(x_n) \to \frac{k-1}{k}s + \frac{1}{k}s = s,$$

又由引理 2 可知，由 $T_k(x_n)\to s$ 可得 $x_n\to s$.

先证恒等式

$$M(c_n^{(k-1)})=T_k(c_n^{(k)}),\quad k\geqslant 1, \tag{1}$$

即

$$\frac{c_0^{(k-1)}+\cdots+c_n^{(k-1)}}{n+1}=\frac{k-1}{k}\frac{c_0^{(k)}+\cdots+c_n^{(k)}}{n+1}+\frac{1}{k}c_n^{(k)}. \tag{2}$$

由

$$s_n^{(k)}=s_{n-1}^{(k)}+s_n^{(k-1)},$$

推出

$$\frac{(n+k)!}{n!k!}c_n^{(k)}=\frac{n(n+k-1)!}{n!k!}c_{n-1}^{(k)}+\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}c_n^{(k-1)},$$

$$kc_n^{(k-1)}=(n+k)c_n^{(k)}-nc_{n-1}^{(k)}=(k-1)c_n^{(k)}+((n+1)c_n^{(k)}-nc_{n-1}^{(k)}),$$

即

$$k\sum_{n=0}^{m}c_n^{(k-1)}=(k-1)\sum_{n=0}^{m}c_n^{(k)}+(m+1)c_m^{(k)}.$$

这就是恒等式 (2).

今有

$$h_n^{(0)}=s_n^{(0)}=c_n^{(0)},$$

$$h_n'=\frac{s_n'}{n+1}=c_n',$$

简书之

$$h'=c',$$

则

$$h''=M(h')=M(c')=T_2(c''),$$

$$h'''=M(h'')=MT_2(c'')=T_2M(c'')=T_2T_3(c'''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h^{(k)}=M(h^{(k-1)})=MT_2T_3\cdots T_{k-1}(c^{(k-1)})$$

$$=T_2T_3\cdots T_{k-1}M(c^{(k-1)})=T_2\cdots T_{k-1}T_k(c^{(k)}).$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}c_n^{(k)}=s,$$

则依序得

$$T_k(c^{(k)})\to s,$$

$$T_{k-1}T_k(c^{(k)})\to s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h^{(k)}=T_2T_3\cdots T_k(c^{(k)})\to s.$$

即得

Schnee 定理. 由

$$\lim_{n\to\infty}c_n^{(k)}=s,$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = s.$$

反之，如果

$$h_n^{(k)} \to s,$$

则由引理 2 逐步推出

$$T_3T_4\cdots T_k(c^{(k)}) \to s,$$
$$T_4\cdots T_k(c^{(k)}) \to s,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_k(c^{(k)}) \to s,$$
$$c^{(k)} \to s.$$

就是

Knopp 定理. 由

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = s,$$

推得

$$\lim_{n\to\infty} c_k^{(k)} = s.$$

§ 5. (C,α) 求和

再回到 § 1 中 $s_n^{(k)}$ 的定义. 命

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

则

$$f(x) = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n.$$

由于

$$(1-x)^{-(k+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n,$$

因此由

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n = (1-x)^{-(k+1)} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^m \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l, \tag{1}$$

即得

$$s_n^{(k)} = \sum_{m+l=n} \binom{m+k}{k} a_l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+k}{k} a_l.$$

因而

$$c_n^{(k)} = \frac{\sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+k}{k} a_l}{\binom{n+k}{k}}. \tag{2}$$

不难证明

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n-l+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}.$$

(在 (1) 式中命 $a_0=a_1=\cdots=a_n=\cdots=1.$)

(2) 可改写为

$$c_n^{(k)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{(n-l+k)\cdots(n-l+1)}{(n+k)\cdots(n+1)}a_l$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma(n-l+k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n-l+1)}a_l,$$

则对非整数 k，我们也可定义 (c, k) 求和法.

在研究 (c, α) 求和时，我们假定 $\alpha>-1$，如果

$$c_n^{(\alpha)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma(n-l+\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n-l+1)}a_l\to s,$$

则

$$a_0+a_1+\cdots+a_n\cdots=s,\quad (c, \alpha).$$

我们不深入研究 (c, α) 求和的问题，读者可以自己证明：如果 $\alpha'>\alpha$，则由

$$a_0+a_1+\cdots+a_n\cdots=s,\quad (c, \alpha),$$

可推出

$$a_0+a_1+\cdots+a_n\cdots=s,\quad (c, \alpha').$$

§6. Abel 求和法

定义. 命

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

如果

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)$$

存在而且等于 s，则称级数

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$$

可以 Abel 求和，它的 Abel 和等于 s，用符号

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots=s, (A)$$

表之.

上节已知凡 (c, k) (或 (H, k)) 可求和的级数一定可以 Abel 求和，反之并不真确. 例如

$$f(x)=e^{\frac{1}{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

在 $|x|<1$ 内收敛，而且

$$\lim_{x\to 1}f(x)=e^{\frac{1}{2}},$$

但如果

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

是可 k 阶求和,则 $a_n = O(n^k)$, 即有一常数 P 使

$$|a_n| < P\binom{n+k}{k}.$$

因此,当 $0 \leqslant r < 1$ 时,

$$e^{\frac{1}{1-r}} = f(-r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < P\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} r^n = P(1-r)^{-(k+1)}.$$

当 $r \to 1$ 时,这式子不正确.

§7. 一般求和法简介

提高一步,命

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} s_n, \quad m = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

如果由

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

可以推得

$$\lim_{m\to\infty} t_m = s,$$

则 (1) 可以定义一种求和法. §5 所说明的 (C, α) 求和就是这一类.

又命

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) s_n,$$

如果由

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

可以推得

$$\lim_{x\to 1} t(x) = s,$$

则 (2) 也可以定义一种求和法. Abel 求和法

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)s_n$$

就是一例.

求和法 (1) 将以方阵 (C_{mn}) 表之. (2) 将以 $C_n(x)$ 表之.

在附录中将寻求必要且充分的条件使 (1) 把收敛贯变为收敛贯,把收敛于 s 的贯,变为收敛于 s 的贯.

有两种求和法 P 与 Q, 如果凡是可以由 P 求和的贯,一定可以由 Q 求和, 则称为 Q 法强于 P 法,以符号

$$P < Q$$

表之.

以上可证明,如果 $k \leqslant k'$, 则

$$(C, k) < (C, k'),$$

而

$$(C, k) < A.$$

关系<显然有传递性,即由

$$P < Q, \quad Q < R,$$

可以推得

$$P < R.$$

我们有以下一些问题:

1) 定义一些求和法.

2) 求和法之间的比较,孰强孰弱.

3) 加上何种条件,强者可能变为弱者.

4) 把收敛性改为渐近性,如 $s_n \sim an^\beta$.

§8. Borel 求和法

命

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

代表一个非多项式的整函数,而且 $p_n \geqslant 0$. 我们引进一种求和法: 如果当 $x \to \infty$ 时,

$$\frac{s(x)}{J(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \to s,$$

则称为 $s_n \to s$, (J), 或

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, (J),$$

即级数可 J 求和.

取

$$p_n = \frac{1}{n!},$$

则得

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x_n}{n!} \to s.$$

这是有名的 Borel 求和法,以 $s_n \to s$, (B) 表之.

定理 1. 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, (J),$$

或 $s_n \to s$ 则 $s_n \to s, (J)$.

证．并不失普遍性，可以假定 $s=0$，给了 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时

$$|s_n| < \varepsilon.$$

如此，则

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} p_n s_n x^n\right| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n x^n \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} p_n s_n x^n\right| + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n.$$

由于 $J(x)$ 非多项式，而且 $p_n \geqslant 0$，故对任意 k，常有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{J(x)} = 0,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = 0(J(x)).$$

即得所证．

现在再介绍 Borel 求和第二法．若

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} ds = s,$$

则定义

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, (B').$$

定理 2. 命

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!},$$

如果当 $x\to\infty$ 时，$e^{-x}a(x)\to 0$，则 B 与 B' 二法是等价的．

证．命

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}.$$

不难证明：如果 $a(x)$ 对所有的 x 收敛，则 $s(x)$ 也对所有的 x 收敛．并且反之亦然，又

$$a'(x) = \sum a_{n+1} \frac{x^n}{n!}, \quad s'(x) = \sum s_{n+1} \frac{x^n}{n!},$$

$$\int_0^x e^{-t} a'(t) dt = e^{-x} a(x) - a_0 + \int_0^x e^{-t} a(t) dt, \tag{1}$$

$$e^{-x} s(x) - a_0 = \int_0^x \frac{d}{dt}(e^{-t} s(t)) dt = \int_0^x e^{-t}(s'(t) - s(t)) dt$$

$$= \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) \frac{t^n}{n!} dt$$

$$= \int_0^x e^{-t} \sum a_{n+1} \frac{t^n}{n!} dt = \int_0^x e^{-t} a'(t) dt. \tag{2}$$

比较 (1), (2) 得出

$$e^{-x}s(x) = e^{-x}a(x) + \int_0^x e^{-t}a(t)dt. \tag{3}$$

这就是定理 2.

由公式 (3) 还可以推得更深入的结果.

定理 3. 一级数如果是 (B) 可求和,一定是 B' 可求和,即

$$B < B'.$$

命

$$\int_0^x e^{-t}a(t)dx = \phi(t).$$

如果这级数 B 可求和,则由 (3) 可知

$$\phi(x) + \phi'(x) \to s.$$

因此定理 3 的证明归结为求证以下的

引理. 假定 $\phi(x)$ 有连续微商,如果当 $x \to \infty$ 时,

$$\phi(x) + \phi'(x) \to 0,$$

则

$$\phi(x) \to 0.$$

证. 1) 如果当 $x > X$ 时, $\phi'(x) \geqslant 0$, 则 $\phi(x)$ 是单调增函数,故有极限 l (可能是 $+\infty$). 由假定 $\phi'(x) \to -l$, 由 $\phi'(x) \geqslant 0$ 可知 $l \leqslant 0$. 由

$$\phi(x+1) - \phi(x) = \int_x^{x+1} \phi'(t)dt \to -l,$$

可知除 $l = 0$ 外无可能.

2) 如果当 $x > X$ 时, $\phi'(x) \leqslant 0$, 同法可证本定理.

3) 不然,则 $\phi'(x)$ 变号无穷次,因而有无穷个零点,即 $\phi(x)$ 有无穷个极大极小. 假定在 $x = x_1, x_2, \cdots$ 时 $\phi(x)$ 给极大值,则由

$$\phi(x_i) + \phi'(x_i) = \phi(x_i)$$

可知

$$\lim_{i\to\infty} \phi(x_i) = 0.$$

又假定在 $x = y_1, y_2 \cdots$ 时, $\phi(x)$ 给极小值,则

$$\lim_{i\to\infty} \phi(y_i) = 0,$$

因此

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0.$$

有 B' 可求和而 B 不可求和的级求存在,例如

$$a_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+2)^n}{(2p+1)!},$$

则

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+2)^n}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} e^{(2p+2)x} = e^x \sin e^x,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}a(x)dx = \int_0^\infty \sin e^x dx = \int_1^\infty \frac{\sin u}{u} du.$$

但 $e^{-x}a(x)$ 并不趋限，所以并非 (B) 可求和.

但由等式 (2) 可以推出

定理 4. 以下两个式子是等价的

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = s, \ (B),$$
$$a_1 + a_2 + \cdots = s - a_0, \ (B').$$

注意

$$a_1 + a_2 + \cdots = s - a_0, \ (B)$$

与

$$a_0 + a_1 + \cdots = s, \ (B')$$

并不等价.

§ 9. Hardy-Littlewood 定理

定理 1. 如果 $\sum a_n = s, (c, k)$, k 是整数 >1，及

$$a_n = O(n^{-1}),$$

则 $\sum a_n$ 收敛于 s.

定理 2. 如果 a_n 是实数，$\sum a_n = s, (c, k)$, k 是整数 >1，及

$$na_n > -H,$$

则 $\sum a_n$ 收敛于 s, H 是一正常数.

定理 1 是定理 2 的自然推论，因为分开 a_n 的虚实部分即可由定理 2 推出定理 1 来.

命 $b_n = na_n$，由 b_n 定义 T_n^k 和由 a_n 定义 s_n^k 的方法相同. 定理 2 的证明依赖于

定理 3. 假定 $\sum a_n$, (c, k) 可求和，$k > 0$，则 $\sum a_n$, $(c, k-1)$ 可求和的必要且充分条件是 $T_n^{k-1} = O(n^k)$.

定理 4. $\sum a_n (c, k)$ 可求和 $(k > 0)$ 的必要且充分的条件是级数

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{T_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{n} n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(n-1)!}{(k+1)(k+2)\cdots(n+k)} T_n^{(k-1)}$$

收敛，或等价于

$$\sum n^{-k-1} T_n^{(k-1)}$$

收敛.

因为

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = (1-x)^k \sum_{n=0}^\infty s_n^{(k-1)} x^n,$$

由

$$\sum_{n=0}^\infty n a_n x^n = (1-x)^k \sum_{n=0}^\infty T_n^{(k-1)} x^n,$$

可得

$$(1-x)^k\sum_{n=0}^{\infty}T_n^{(k-1)}x^n=-xk(1-x)^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(k-1)}x^n+(1-x)^k\sum_{n=0}^{\infty}ns_n^{(k-1)}x^n$$

$$=(1-x)^k\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)s_n^{(k-1)}x^n-k(1-x)^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(k-1)}x^n$$

$$=(1-x)^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)s_n^{(k-1)}x^n-k\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(k)}x^n\right).$$

因此得

$$T_n^{(k-1)}=(k+n)s_n^{(k-1)}-ks_n^{(k)}. \tag{1}$$

再由

$$s_n^{(k-1)}=s_n^{(k)}-s_{n-1}^{(k)},$$

可得

$$T_n^{(k-1)}=ns_n^{(k)}-(n+k)s_{n-1}^{(k)}. \tag{2}$$

由 (1) 及 (2) 推出

$$\frac{s_n^{(k-1)}}{\binom{n+k-1}{k-1}}-\frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}=\frac{T_n^{(k-1)}}{k\binom{n+k}{k}} \tag{3}$$

及

$$\frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}-\frac{s_{n-1}^{(k)}}{\binom{n+k-1}{k}}=\frac{T_n^{(k-1)}}{n\binom{n+k}{k}}.$$

命 $n=1,2,\cdots,N$，而总加之得

$$\frac{s_N^{(k)}}{\binom{N+k}{k}}=a_0+\sum_{n=1}^{N}\frac{T_n^{(k-1)}}{n\binom{n+k}{k}}. \tag{4}$$

由 (3) 推得定理 3，由 (4) 推出定理 4，由 Stirling 公式可知定理 4 的两个结论的等价性.

定理 2 的证明：不妨假定 $H=1$. 如果 $T_n^{(k-1)}\neq O(n^k)$，则有一 $c>0$，使有无穷个 n 使

$$T_n^{(k-1)}>cn^k, \tag{5}$$

或有无穷个 n 使

$$T_n^{(k-1)}<-cn^k. \tag{6}$$

先假定有无穷个 N 使 (5) 成立.

若 $\eta>1$ 及 $N\leqslant n\leqslant\eta N$，则

$$T_n^{(k-1)}-T_N^{(k-1)}=\sum_{\nu=0}^{N}\left\{\binom{n-\nu+k-1}{k-1}-\binom{N-\nu+k-1}{k-1}\right\}b_\nu$$

$$+\sum_{\nu=N+1}^{n}\binom{n-\nu+k-1}{k-1}b_\nu. \tag{7}$$

由于 $b_\nu > -1$ 及 b_ν 的系数是正的，所以

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\sum_{\nu=0}^{N}\left\{\binom{n-\nu+k-1}{k-1} - \binom{N-\nu+k-1}{k-1}\right\}$$
$$-\sum_{\nu=N+1}^{n}\binom{n-\nu+k-1}{k-1},$$

因此

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\binom{n+k}{k} + \binom{N+k}{k}.$$

由于

$$\binom{n+k-1}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad \binom{N+k-1}{k} \sim \frac{N^k}{k!},$$

所以对任一 $\varepsilon > 0$，充分大的 N，适合于 $N \leqslant n \leqslant \eta N$ 的 n 常有

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\frac{1}{k!}((1+\varepsilon)\eta^k - (1-\varepsilon))N^k.$$

取 ε, η 使

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\frac{1}{2}cN^k.$$

由 (5) 式 $(n = N)$，则

$$T_n^{(k-1)} > \frac{1}{2}cN^k, \quad N \leqslant n \leqslant \eta N.$$

故对充分大的 N 有

$$\sum_N^{\eta N}\frac{T_n^{(k-1)}}{n^{k+1}} > \frac{1}{2}cN^k\sum_N^{\eta N}\frac{1}{n^{k+1}} > \frac{1}{2}cN^k\frac{(\eta-1)N}{(\eta N)^{k+1}} = \frac{c(\eta-1)}{2\eta^{k+1}}.$$

这对无穷个 N 正确. 因此定理 4 中的级数发散，因此 $\sum a_n$ 的 (C, k) 和不存在，因此不可能有无穷个 n 使 (5) 式成立.

同法(但取 $(\zeta N, N)$, $\zeta < 1$) 可证，不可能有无穷个 n 使 (6) 式成立. 因此 $T_n^{(k-1)} = O(n^k)$，故由定理 3 可知 $\sum a_n(C, k-1)$ 可求和. 一次一次地降下来可得 $\sum a_n$ 收敛.

§ 10. Tauber 定 理

定理 1 (Tauber). 如果 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$，则由

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, \ (A)$$

可得

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s.$$

这定理等价于：如果当 $|x| < 1$ 时，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

收敛，且 $na_n \to 0$ 及

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

证. 命

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

则当 $0 \leqslant x < 1$ 时,

$$s_m - f(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(1 - x^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n.$$

由于 $1 - x^n = (1 + x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leqslant n(1 - x)$, 所以

$$|s_m - f(x)| \leqslant (1 - x) \sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| x^n.$$

命

$$\varepsilon_m = \max_{n>m} n|a_n|,$$

则 $\varepsilon_m \to 0$. 故

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| x^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n| \frac{1}{n} x^n \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m} x^n \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m(1 - x)}.$$

另一方面,由 $n|a_n| \to 0$, 其算术平均当 $m \to \infty$ 时也有

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n|a_n| \to 0.$$

命 $x = 1 - \frac{1}{m}$, 则当 $m \to \infty$ 时,

$$\left|s_m - f\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \varepsilon_m \to 0,$$

因此,由 $f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 0$, 可知 $s_m \to 0$.

附记 1. 我们并未完全用到假定 "$f(x) \to 0$", 而只用到 "$f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 0$". 但加上 $na_n \to 0$, 则可推得 "$f(x) \to 0$", 其理内是: 由

$$|na_n| < c$$

可知

$$|f'(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| < c \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{c}{1 - x} \ (0 < x < 1).$$

故在 $1 - \frac{1}{m} < x < 1 - \frac{1}{m + 1}$ 中,

$$\left|f(x) - f\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right| = \left|\int_{1-\frac{1}{m}}^{x} f'(y) dy\right| < \int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m+1}} \frac{c}{1 - \left(1 - \frac{1}{m + 1}\right)} dy$$

$$= c\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m + 1}\right)(m + 1) = \frac{c}{m}.$$

此处只与m有关，而且 $\to 0$。

习题. 在怎样的假定下，可以由

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, \ (A)$$

推出

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, \ (C^k).$$

附记 2. Littlewood 把条件改进为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$，如果 a_n 是实数，Hardy-Littlewood 更改进为 $\geqslant H/n$，$(H < 0)$。这一深入的结果如不与 § 9 的结果对照以观，将觉得非常突然。

§ 11. 在收敛圆圆周上的渐近性质

定理 1. 假定 $a_n \geqslant 0$，$b_n \geqslant 0$ 及级数

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n$$

在 $0 < x < 1$ 处收敛，而在 $x = 1$ 处发散. 如果

$$a_n \sim c b_n, \quad n \to \infty,$$

则当 $x \to 1$ 时，

$$f(x) \sim c g(x).$$

证. 给 $\varepsilon > 0$，有N使 $n > N$ 时，

$$|a_n - c b_n| < \varepsilon b_n,$$

故

$$|f(x) - c g(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - c b_n) x^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - c b_n| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - c b_n| + \varepsilon g(x).$$

由于 $g(x) \to \infty$，所以可取δ使 $x > 1 - \delta$ 时，

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - c b_n| < \varepsilon g(x).$$

即得当 $x > 1 - \delta$ 时，

$$|f(x) - c g(x)| < 2\varepsilon g(x).$$

定理 2. 仍然假定 $0 < x < 1$ 时级数收敛. 命

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n,$$

假定 $s_n \geqslant 0$，$t_n \geqslant 0$，及 $\sum s_n$ 与 $\sum t_n$ 发散，如果

$$s_n \sim c t_n,$$

则

$$f(x) \sim c g(x).$$

证. 当 $0 < x < 1$ 时，

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad g(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

由定理 1，

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim c \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

所以得出本定理.

（读者试自己推出高阶和的对应定理.）

特例：如果 $s_n \sim cn$，则

$$f(x) \sim \frac{c}{1-x}.$$

例 1. 若 $p<1$，则当 $x\to 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \sim \frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}.$$

由于

$$(1-x)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)} x^n$$

及

$$\frac{1}{n^p} \sim \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)},$$

故得此结果.

例 2. 命

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots.$$

如果 $\alpha+\beta>\gamma$，当 $x\to 1$ 时，

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}},$$

而

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \log\frac{1}{1-x}.$$

定理 2 能否有逆定理？不行，例如

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^{2n} - x^{2n+1}),$$

此处 $s_{2m+1} = -(m+1)$，而 $s_{2m} = m+1$，故 s_n 有无穷振动的情况. 但

$$f(x) \sim \frac{1}{4}\Big/(1-x).$$

这个例子的系数有正有负，我们假定系数非负，能不能找到逆定理？回答是肯定的.

§ 12. Hardy-Littlewood 定理

定理 1（Hardy-Littlewood）. 如果 $a_n \geqslant 0$，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{1}{1-x},\quad 当\ x\to 1,$$

则当 $n\to\infty$ 时，

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\sim n.$$

作为比较，先证明一较容易的定理.

定理 2. 假定 $a_n\geqslant 0$, $n=0,1,2\cdots$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad 0<x<1,$$

如果

$$\frac{1}{1-x}\gg f(x)\gg\frac{1}{1-x},$$

则

$$n\gg s_n\gg n.$$

逆定理十分显然.

证. 1) 显然有

$$s_nx^n\leqslant\sum_{m=0}^{n}a_mx^m\leqslant f(x)\ll\frac{1}{1-x},$$

取 $x=e^{-\frac{1}{n}}$, 则得

$$\frac{s_n}{e}\ll\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}}\ll n,$$

即

$$s_n\ll n. \tag{1}$$

2) 由 (1) 可知

$$f(x)=(1-x)\sum_{m=0}^{\infty}s_mx^m\ll(1-x)s_n\sum_{m=0}^{n-1}x^m$$

$$+(1-x)\sum_{m=n}^{\infty}mx^m\ll s_n+nx^n+\frac{x^{n+1}}{1-x},$$

即得

$$\frac{1}{1-x}\ll s_n+nx^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

取 $x=e^{-\lambda/n}$,

$$1-x=1-e^{-\lambda/n}=\int_0^{\lambda/n}e^{-t}dt\leqslant\frac{\lambda}{n},$$

所以

$$\frac{n}{\lambda}\ll s_n+ne^{-\lambda}+\frac{ne^{-\lambda}}{\lambda}.$$

当 λ 充分大时

$$s_n\gg n.$$

但是 Hardy-Littlewood 定理的证明并不容易．以下是 Karamata 的证明．

1）先证对任一多项式 $p(x)$ 常有

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^np(x^n)=\int_0^1 p(t)dt. \tag{1}$$

由于可加性，如果证明 $p(x)=x^l$，即得所证．而

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+ln}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{1-x^{l+1}}(1-x^{l+1})\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{(l+1)n}=\frac{1}{l+1}=\int_0^1 t^l dt.$$

2）(1) 式对任一 (0, 1) 内的连续函数 $g(x)$ 也对，由 Weierstrass 定理：给了 $\varepsilon>0$，可以找两个多项式 $p_1(t)$，$p_2(t)$ 使

$$p_1(x)<g(t)<p_2(t),$$

而且

$$\int_0^1[g(t)-p_1(t)]dt<\varepsilon,\quad \int_0^1[p_2(t)-g(t)]dt<\varepsilon.$$

因此

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^np_1(x^n)<(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng(x^n)<(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^np_2(x^n).$$

当 $x\to 1$ 时，左右边各等于

$$\int_0^1 p_1(t)dt,\quad \int_0^1 p_2(t)dt.$$

即

$$\int_0^1 g(t)dt-\varepsilon\leqslant\overline{\lim_{x\to 1}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng(x^n)\leqslant\int_0^1 g(t)dt+\varepsilon.$$

因此，对任一连续函数 $g(t)$ 常有

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng(x^n)=\int_0^1 g(t)dt.$$

3）取

$$\begin{aligned}h(t)&=0,\quad \text{当 } 0\leqslant t<e^{-1},\\ &=\frac{1}{t},\quad \text{当 } e^{-1}\leqslant t\leqslant 1,\end{aligned}$$

这是一个有间断点 $t=e^{-1}$ 的函数． 给 $\varepsilon>0$，可以作出两个连续函数 $g_1(t)$ 与 $g_2(t)$，使

$$g_1(t)\leqslant h(t)\leqslant g_2(t),$$

而且

$$\int_0^1[h(t)-g_1(t)]dt<\varepsilon,\quad \int_0^1[g_2(t)-h(t)]dt<\varepsilon,$$

这样就可以证明

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^nh(x^n)=\int_0^1 h(t)dt=\int_{e^{-1}}^1\frac{dt}{t}=1,$$

即

$$(1-x)\sum_{n\leqslant 1/\log\frac{1}{x}}a_n\sim 1.$$

取 $x=e^{-\frac{1}{N}}$，则得

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} a_n \sim 1.$$

即得所证.

定理 3. 假定 $a_n \geqslant 0$，$\alpha > 1$，及

$$f(x) \sim (1-x)^{-\alpha},$$

则

$$s_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

证. 命

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\,dt$$

（这称 $f(x)$ 的 $\alpha-1$ 次积分）. 由假定

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\alpha+n-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n^{\alpha-1}},$$

另一方面

$$f_{\alpha-1}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha}\,dt$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-2}(1-xu)^{-\alpha}\,du$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l-1)}{l!} x^l \int_0^1 (1-u)^{\alpha-2} u^l\,du$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l-1)}{l!}\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+l)} x^l$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)},$$

故

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{\nu^{\alpha-1}} \sim \frac{n}{\Gamma(\alpha)}.$$

定理的结论可由此及以下的引理推得.

引理. 若 $\alpha > 0$，由

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\alpha-1}} \sim \frac{N}{\Gamma(\alpha)},$$

可以推出

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sim \frac{N^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

证. 命

$$t_0=0,\ t_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\alpha-1}},\quad N=1,2,\cdots,$$

则

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}(t_n-t_{n-1})n^{\alpha-1}=\sum_{n=1}^{N-1}t_n(n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1})+t_N N^{\alpha-1}.$$

由假定当 $N>X$ 时

$$\left|t_N-\frac{N}{\Gamma(\alpha)}\right|<\varepsilon N,$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1}\left(t_n-\frac{n}{\Gamma(\alpha)}\right)(n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1})+\left(t_N-\frac{N}{\Gamma(\alpha)}\right)N^{\alpha-1}\right|$$
$$\leqslant c\sum_{n=1}^{X}n|n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}|+\varepsilon\sum_{n=X+1}^{N-1}n|n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}|+\varepsilon N^{\alpha}$$
$$\leqslant c\sum_{n=1}^{X}n|n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}|+\varepsilon\left|\sum_{n=X+1}^{N-1}n^{\alpha}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=X+2}^{N}(n-1)n^{\alpha-1}\right|+\varepsilon N^{\alpha},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\sum_{n=1}^{N-1}n[n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}]+N^{\alpha}\right\}+o(N^{\alpha})$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\sum_{n=1}^{N}n^{\alpha}-\sum_{n=2}^{N}(n-1)n^{\alpha-1}\right\}+o(N^{\alpha})$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{N}n^{\alpha-1}+o(N^{\alpha}).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{N}n^{\alpha-1}\sim\frac{N^{\alpha}}{\alpha},$$

即得所证.

§ 13. Littlewood 的 Tauber 定理

定理 1 (Littlewood). 假定

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s\tag{1}$$

及 $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s.\tag{2}$$

即由

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,\ (A)$$

及 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 可以推得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

在证明这定理之前,先证以下的

引理. 假定 $f(x)$ 在 $o \leqslant x \leqslant 1$ 中有二阶微商,并当 $x \to 1$ 时

$$f(x) = o(1),\ f''(x) = O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right),$$

则

$$f'(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

证. 命 $x' = x + \delta(1-x)$, $o < \delta < \frac{1}{2}$, 则

$$f(x') = f(x) + \delta(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2(1-x)^2 f''(\xi).$$

这儿 $x < \xi < x'$, 故

$$\begin{aligned}(1-x)f'(x) &= \frac{f(x') - f(x)}{\delta} - \frac{1}{2}\delta(1-x)^2 f''(\xi) \\ &= \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + O(\delta),\end{aligned} \tag{3}$$

这儿用了

$$f''(\xi) = O\left(\frac{1}{(1-\xi)^2}\right) = O\left(\frac{1}{(1-x')^2}\right) = O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

先取 δ 充分小,并取 x 充分接近于 1, 使 (3) 的右边可以任意小,这证明了引理.

定理 1 的证明. (证明的主要难点已经在 § 12 定理 1 中解决了.) 不妨假定 $s=0$, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = o(1),\quad x \to 1.$$

由于 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 可知

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = O\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}\right) = O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

由引理可知

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{n} n a_n x^{n-1} = o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

假定 $|na_n| \leqslant c$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{na_n}{c}\right)x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{f'(x)}{c} \sim \frac{1}{1-x}.$$

这级数的系数是正的，由 § 12 定理 1 可知

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu a_\nu}{c}\right)\sim n,$$

即得

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu=o(n). \tag{4}$$

命

$$w_n=\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu,\quad n>0,\ w_0=0,$$

$$f(x)-a_0=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{w_n-w_{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}w_n\left(\frac{x^n-x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^n}{n(n+1)}\right)$$

$$=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}x^n.$$

由 $w_n=o(n)$，故当 $x\to 1$ 时第一项 $\to 0$．又已知 $f(x)\to 0$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}x^n\to -a_0.$$

现在

$$\frac{w_n}{n(n+1)}=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

可以用普通的 Tauber 定理了．因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}=-a_0.$$

左边写成为

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n}{n(n+1)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}w_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n-w_{n-1}}{n}-\frac{w_N}{N+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n,$$

即得所证．

附记．这结果当然包括 § 9 的 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 结果，但思索过程正是因为有了 § 9 的结果，才得出这个更深刻的结果．

§ 14. 解析性与收敛性

级数函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z}$$

在 $z=1$ 处有则，但所代表的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

却是发散的．但

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=\frac{1}{2},\quad (C,1).$$

函数

$$\frac{1}{(1+z)^n}$$

建议：有函数 $f(z)$ 存在，在 $z=1$ 处有则，但在 $z=1$ 的幂级数却不能 (C,k) 求和 $(k<n)$.

Abel 求和却最妥善地反映解析性，即如果 $f(z)$ 在 $z=1$ 有则，则

$$\lim_{z\to 1}f(z)$$

存在(反之，有例子说明 $\lim\limits_{z\to 1}f(z)$ 存在，而 $f(z)$ 在 $z=1$ 并不解析).

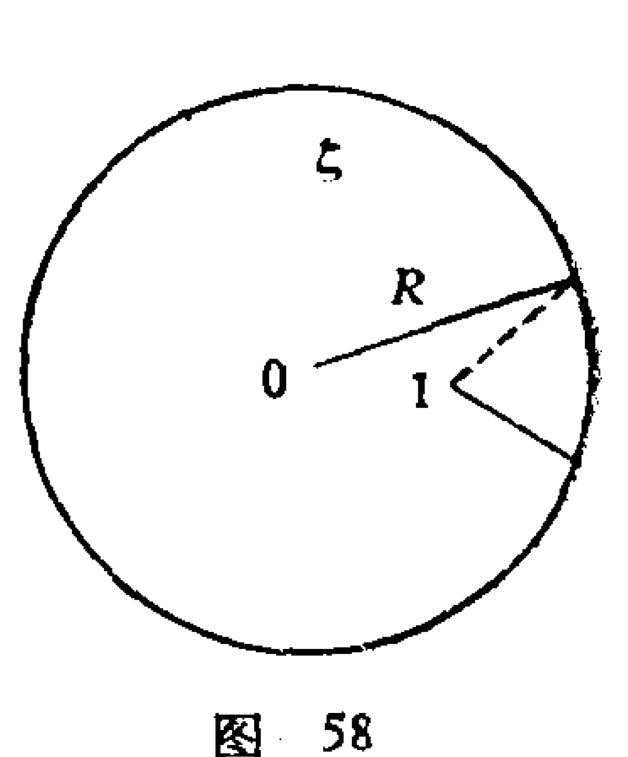


图 58

我们现在的问题是加上怎样的条件使有则点处级数是收敛(或可和).

定理 1 (M. Riesz). 命 ζ 代表一个扇形

$$|z|\leqslant R,\ \vartheta\leqslant\arg(z-1)\leqslant 2\pi-\vartheta\ \left(R>1,\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right),$$

假定 $f(z)$ 在 ζ 上及 ζ 内连续，除 $z=1$ 外处处有则，则级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

在圆 $|z|=1$ 上一致收敛．

证．我们需要以下的引理：

如果 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ 及 $\lim\limits_{r\to 1}f(re^{i\zeta})=g(\zeta)$ (存在). 这个极限对所有的 ζ 是一致的，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\varphi}$ 一致收敛于 $g(\varphi)$.

这条引理与 Tauber 定理的证明相同（但请注意一致性）．由此引理，我们仅需证明 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

不失普遍性可以假定 $f(1)=0$. 命 M 是 $|f(z)|$ 在 ζ 上的最大值．给与 $\delta>0$，可以取 $r(=r(\delta))$ 使在 Q 的直线边界上

$$|f(z)|<\delta,$$

而此处

$$Q:\ |z|\leqslant r,\quad \vartheta\leqslant\arg(z-1)\leqslant 2\pi-\vartheta.$$

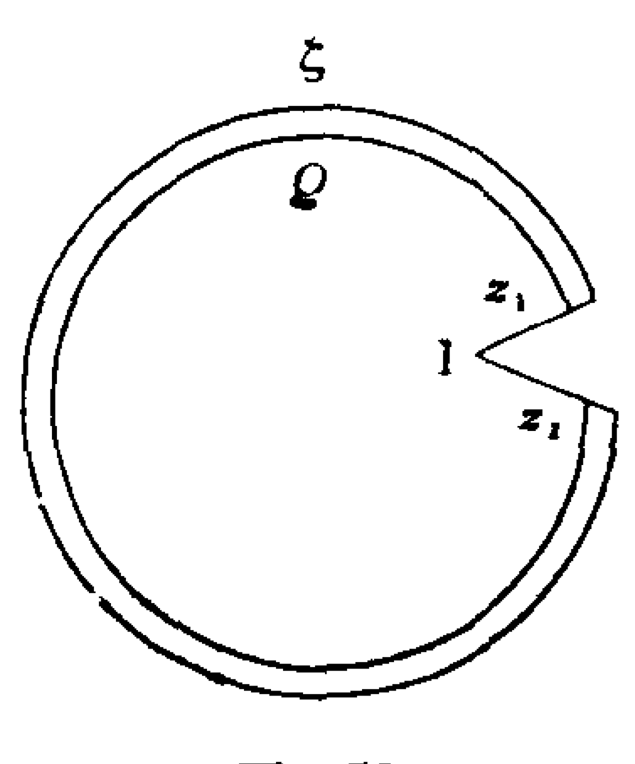


图 59

由 Cauchy 定理(由于 $f(z)$ 在 Q 上连续)，得

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_1^{z_1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz+\int_{z_1}^{z_2}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz+\int_{z_2}^{1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right).$$

当 $n>0$ 时，

$$\left|\int_1^{z_1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\delta\int_0^{|z_1-1|}\frac{dy}{|1+e^{i\vartheta}y|^{n+1}}\leqslant\delta\int_0^{|z_1-1|}\frac{dy}{(1+y\cos\vartheta)^{n+1}}$$
$$<\delta\int_0^{\infty}\frac{dy}{(1+y\cos\vartheta)^{n+1}}=\frac{\delta}{n\cos\vartheta}.$$

同法

$$\left|\int_{z_2}^{1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|<\frac{\delta}{n\cos\vartheta}.$$

在由 z_1 到 z_2 的圆弧上

$$\left|\int_{z_1}^{z_2}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant 2\pi r\frac{M}{r^{n+1}}=\frac{2\pi M}{r^n},$$

因此

$$|a_n|<\frac{\delta}{\pi\cos\vartheta}\frac{1}{n}+\frac{M}{r^n},$$

即对任一 $\delta>0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|a_n|\leqslant\frac{\delta}{\pi\cos\vartheta}.$$

即

$$|a_n|=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

即得所证.

定理 2 (Fejér). 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2$$

收敛,则由

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}=s(\theta),\ (A) \tag{1}$$

可以推出

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}=s(\theta). \tag{2}$$

并且如果 (1) 的收敛在某一区域内一致,则在同一区域内 (2) 也是一致收敛的.

证. 这定理对多项式显然正确. 命

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}n|a_n|^2=\varepsilon_\nu,$$

这儿 $\varepsilon_\nu>0$ 而且 $\varepsilon_\nu\to0$. 取 ν 充分大,使

$$r_\nu=1-\frac{\sqrt{\varepsilon_\nu}}{\nu}>0,$$

则对所有的实数 φ

$$\left|\sum_{n=0}^{\nu}a_ne^{n\varphi i}-f(r_\nu e^{\varphi i})\right|=\left|\sum_{n=0}^{\nu}a_ne^{n\varphi i}(1-r_\nu^n)-\sum_{n=\nu+1}^{\infty}a_nr_\nu^ne^{n\varphi i}\right|$$
$$\leqslant(1-r_\nu)\sum_{n=0}^{\nu}n|a_n|+\sum_{n=\nu+1}^{\infty}|a_n|r_\nu^n,$$

右边与 φ 无关，因此如是证明右边 $\to 0$（当 $\nu\to\infty$），则定理已证.

由 Schwarz 不等式，上式右边

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (1-r_\nu)\sum_{n=0}^{\nu}\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\,|a_n| + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sqrt{n}\,|a_n|\,r_\nu^n \\
&\leqslant (1-r_\nu)\sqrt{\sum_{n=0}^{\nu} n\sum_{n=0}^{\nu} n|a_n|^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\sum_{n=\nu+1}^{\infty} n|a_n|^2\sum_{n=\nu+1}^{\infty} r_\nu^{2n}} \\
&\leqslant (1-r_\nu)\sqrt{\nu^2\cdot\varepsilon_0} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\varepsilon_\nu\frac{1}{1-r_\nu}} = \sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_\nu} - \sqrt[4]{\varepsilon_\nu}\to 0.
\end{aligned}
$$

即得所证.

由此推得

定理 3. 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$$

收敛，而且 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上连续，在 $|z|<1$ 中有则，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在圆周上一致收敛.

定理 4. 如果 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant 1$ 上连续，而且在圆 $|z|<1$ 是单叶的（即由 $f(z_1)=f(z_2)$，$|z_1|<1$，$|z_2|<1$ 可推得 $z_1=z_2$），则其幂级数在圆周 $|z|=1$ 上一致收敛.

证. 只需证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2<\infty$$

即足. 圆 $|z|=r(0<r<1)$ 所变成 $w=f(z)$ 的图形的面积等于

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{|z|\leqslant r}|f'(x+iy)|^2dxdy &= \int_0^r\rho d\rho\int_0^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2d\theta \\
&= \int_0^r\rho d\rho\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} na_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\sum_{m=0}^{\infty} m\bar{a}_m\rho^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}d\theta \\
&= 2\pi\int_0^r\rho\sum_{n=0}^{\infty} n^2|a_n|^2\rho^{2n-2}d\rho = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2r^{2n}.
\end{aligned}
$$

即得所证.

§ 15. Borel 多角形

一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的 B' 和是

$$\int_0^\infty e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(zt)^n}{n!}dt.$$

例如：取 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，则

$$\int_0^{\infty} e^{-t}e^{zt}dt=\frac{1}{1-z}.$$

这个积分当 $\boldsymbol{R}z<1$ 时成立，因此 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的 B' 和得出的函数跑出了收敛圆，而变为在 $\boldsymbol{R}z<1$ 的半平面上也有解析表达式了．因此 Borel 求和法可以作为解析拓展的工具，拓展范围如何？将是我们本节的内容．

定理 1. 如果幂级数在一点 P 可以 B' 求和，则在 OP 线段上的每一点都可以 B' 求和．如果 Q 是 O,P 间的一点，则级数在 QP 上可以一致求和．

证．我们并不假定 $f(z)$ 有无收敛圆，我们不妨假定 P 就是 $z=1$．命

$$a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}$$

及

$$J(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}a(zt)dt. \tag{1}$$

我们现在求证：如果当 $z=1$ 时，(1) 收敛，则在 $0<z\leqslant 1$ 时也收敛，对任一 $\delta>0$，在 $\delta\leqslant z\leqslant 1$ 间一致收敛．命

$$J(z)=\frac{1}{z}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}}a(t)dt=\frac{K(z)}{z},\quad 0<z\leqslant 1. \tag{2}$$

命

$$s=\frac{1}{z}-1,$$

则

$$K(z)=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{-t}a(t)dt=k(s).$$

这积分当 $s\geqslant 0$ 时一致收敛，即得定理．

定理 1 并不说明全部事实，实质上，$J(z)$ 在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 上一致收敛．但以上的证明由于 (2) 式中有 $1/z$ 存在，故难以得此结论．

定理 2. 如果 $\sum a_n z^n$ 在 P 处 B' 可和，则在 OP 上一致可和．

证．仍旧和以前一样，可以假定 P 就是 $z=1$．并且也不妨假定 a_n 是实数．我们要证明的是：当 $H'>H\geqslant H_0(\varepsilon)$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 时，

$$|I|=|I(z,H,H')|=\left|\int_H^{H'} e^{-t}a(zt)dt\right|<\varepsilon.$$

由定理 1 已知在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上一致收敛．因此，我们可以假设 $0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}$．有三种情况：

$$\text{(i) } H'z\leqslant 1,\quad \text{(ii) } Hz<1<H'z \quad \text{或} \quad \text{(iii) } Hz\geqslant 1.$$

我们仅证 (ii)，因为 (i) 与 (iii) 都较简单．不妨假定 $H\geqslant 2$．命

$$M=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|a(t)|,\quad N=\max_{T>1}\left|\int_1^T e^{-t}a(t)dt\right|,$$

则

$$I=\int_H^{1/z} e^{-t}a(zt)dt+\int_{1/z}^{H'} e^{-t}a(zt)dt=I_1+I_2.$$

其中

$$|I_1| \leqslant M\int_H^\infty e^{-t}dt = Me^{-H},$$

$$I_2 = \frac{1}{z}\int_1^{H'z} e^{-t/z}a(t)dt = \frac{1}{z}\int_1^{H'z} e^{-st}e^{-t}a(t)dt$$

$$= \frac{e^{-s}}{z}\int_1^T e^{-t}a(t)dt. \quad \left(s = \frac{1}{z} - 1\right)$$

此处 $1 < T < H'z$. 由 $0 < z \leqslant \frac{1}{2}$, $2 \leqslant H \leqslant \frac{1}{z}$, 可知

$$|I_2| \leqslant \frac{N}{z}e^{1-\frac{1}{z}} \leqslant \frac{N}{z}e^{-\frac{1}{2z}} \leqslant NHe^{-\frac{1}{2}H}$$

(当 $u > 2$ 时 $ue^{-\frac{1}{2}u}$ 是递减的). 因此,当 $H \geqslant H_0(\varepsilon)$ 时,

$$|I| \leqslant Me^{-H} + NHe^{-\frac{1}{2}H} < \varepsilon.$$

定理 3. 如果 $\sum a_n z^n$ 在 P 点可 B' 求和，则其和在 OP 上是 z 的解析函数，在以 OP 为直径的圆 C 内有则.

证. 仍旧假定 P 是 $z=1$. 从

$$J(z) = \int_0^\infty e^{-t}a(tz)dt = \frac{K(z)}{z}$$

考虑. 只要证明: 作任二过 OP 的与 OP 成锐角 η 的圆弧,在这样的区域 D 内, $J(z)$ 一致收敛. 写成为

$$z = re^{i\theta}, \quad s = z^{-1} - 1 = \rho e^{i\varphi}.$$

由于 $k(s)$ 在 $s=0$ 时收敛,因此在 $|\varphi| \leqslant \eta$ 中一致收敛. 夹此角的两边就对应于 D 的边界圆弧,其内部对应于 D 的内部,故 $K(z)$ 在 D 内一致收敛.

由

$$f(z) = (c - z)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty c^{-n-1}z^n$$

的 Borel 和

$$J(z) = c^{-1}\int_0^\infty e^{-t(1-z/c)}dt$$

当 $\boldsymbol{R}(z/c) < 1$ 收敛，即当在 $z = c$ 作一垂直于 c 的向径的直线 L_c, 而 z 与 O 在 L_c 的同侧.

这建议以下的概念.

过 $f(z)$ 的奇点 $z = c$ 作 L_c, 所有的 L_c 给出以下的域 D: 对每一 L_c, D 内的点与 O 都在 L_c 的同侧,这样的区域称为函数 $f(z)$ 的 Borel 多边形.

由定理 3 不难推出

定理 4. 在 $f(z)$ 的 Borel 多边形中的任一点 $f(z)$ 都是 B' 可求和,而外面的点一定不可能.

图 60

前面部分的证明已经不成问题，现在证明后一部分. 如果 Q 是多角形外的一点,则 OQ 一定与某一 L_c 相交. 如果在 Q 点 B' 可求和,则由定理 3, 在 OQ 为直径的圆中也 B' 可求和. C 在此圆内, 即在 C 点 B' 可求和,这与 C 是奇点的假定相违背.

第十二章　适合各种边界条件的调和函数

§1. 引　　言

命 $\mathscr{D}$ 是一个域，以闭曲线 C 为其边界，在本章中我们常假定 $\mathscr{D}$ 是单连通的，并且，$\bar{\mathscr{D}}$ 代表 $\mathscr{D}$ 的闭包(即 $\mathscr{D}+C$)．为了简单起见我们还假定曲线 C 有参变数表达式

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

并且 φ,ψ 是有连续微商的函数，我们常用 ζ 表示 C 上的变数．

在 $\mathscr{D}$ 内适合于 Laplace 方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

的函数称为 $\mathscr{D}$ 内的调和函数．

关于调和函数的边值问题我们已经讨论过：

I Dirichlet 问题． 即寻求在 $\bar{\mathscr{D}}$ 上连续在 $\mathscr{D}$ 内调和的函数 $u(z)$，使其在边界 C 上 $u(z)$ 等于一个给定的函数 $\varphi(\zeta)$．我们或简单地写成为

$$\Delta u=0,\quad u|_C=\varphi(\zeta). \tag{2}$$

以后常用这样的符号，切勿忘记 $\chi|_C$ 仅当 χ 在 $\bar{\mathscr{D}}$ 上连续时方有意义(关于边界值不连续的情况我们不深入讨论)．

这问题已经解决，并知道 Dirichlet 问题的解答是存在的，而且是唯一的．

II Neumann 问题．

$$\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C=\psi(\zeta). \tag{3}$$

这问题的解答存在的必要且充分的条件是

$$\int_C \psi(\zeta)d\zeta=0. \tag{4}$$

$\left(\text{因为由 Green 公式 } \int_C \frac{\partial u}{\partial n}d\zeta=\iint_{\mathscr{D}}\Delta u dxdy=0.\right)$ 解答虽不唯一，但可能仅相差一常数项．

这两问题在数学物理上的应用最为广泛，但有时也会出现以下的种种混合边界问题．

III 在 C 上有些部分给出 u，而另一些部分给出 $\frac{\partial u}{\partial n}$，具体的说：在 C 上顺次取 $2n$ 个点

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_n.$$

求适合于

$$\begin{aligned} u&=\varphi(\zeta),\quad \text{如果 } \zeta\in(a_k,\ b_k),\\ \frac{\partial u}{\partial n}&=\psi(\zeta),\quad \text{如果 } \zeta\in(b_k,\ a_{k+1}),\end{aligned} \tag{5}$$

$k = 1, 2, \cdots, n$ 及 $a_{n+1} = a_1$ 的调和函数。

II 的另一推广是

IV 混合边界问题.

$$\Delta u = 0, \quad a(\zeta)\frac{\partial u}{\partial x} + b(\zeta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_C = C(\zeta). \tag{6}$$

第二式可能代之为

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(\zeta)(u - p(\zeta))|_C = 0. \tag{7}$$

本章中也顺便处理

V 双调和方程

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{8}$$

$$u|_C = \varphi(\zeta), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = \psi(\zeta) \tag{9}$$

及

VI 混合型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \theta(y) = \begin{cases} 1, & 若\ y > 0, \\ -1, & 若\ y < 0. \end{cases}$$

由于 Laplace 方程经保角变换而不变，本章中有时仅处理 $\mathscr{D}$ 为单位圆、有时为上半平面的情况. 实质上,这并不失去普遍性.

本章将分为三部分: 首先讲不采用新工具所能解决的问题,其次用 Canchy 型积分来处理的一些问题,再其次用 Келдыш-Седов 公式来处理的一些问题.

§ 2. Poisson 方程

Poisson 方程

$$\Delta u = \rho(x, y) \tag{1}$$

可以作为 Laplace 方程的推广,但实质上，如果知道 (1) 有一解 u_1，则问题立刻化为各种各样边界值的 Laplace 方程

$$\Delta(u - u_1) = 0$$

的求解问题. 我们将证明

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta \tag{2}$$

就是 (1) 的一个解. 因此,今后不特别讨论 Poisson 方程了.

假定 $\rho(\xi, \eta)$ 是 (ξ, η) 的连续函数，所以 $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant C$，为简单起见，我们用符号 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. 注意 $\log\frac{1}{r}$ 是一个有奇点 $x = \xi$, $y = \eta$ 的函数,除此奇点外,不难证明

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r} = -\frac{x-\xi}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{r} = -\frac{y-\eta}{r^2},$$

$$\Delta \log \frac{1}{r} = 0. \tag{3}$$

因此如果 (x, y) 在 $\mathscr{D}$ 的外面,则可以积分号下求微商,因而得出

$$\Delta u(x, y) = 0.$$

当 (x, y) 在 $\mathscr{D}$ 内时,(2) 是瑕积分.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{x-\xi}{r^2}\,d\xi d\eta, \\ Y &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{r}\,d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{y-\eta}{r^2}\,d\xi d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

也是瑕积分,但不难证明它们都是收敛的.

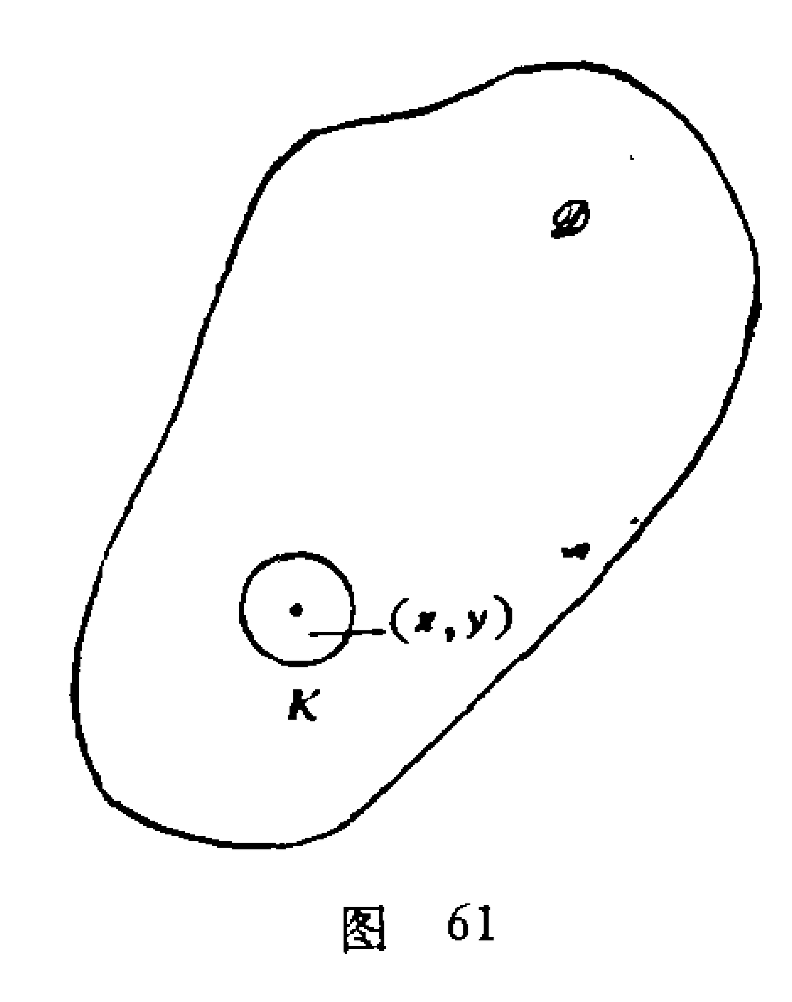


图 61

1) 今先证明

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

即证明: 给了任一 $\varepsilon > 0$, 可以取得 δ, 使 $|\Delta x| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

以 (x, y) 为中心, τ 为半径作一圆 K, 取 τ 足够小使圆在 $\mathscr{D}$ 中. 把积分 (2) 分拆为两部分: u_1 是过小圆 K 的积分,而 u_2 是过 $\mathscr{D} - K$ 的积分. 同样定义 X_1, X_2.

我们来证明: 可以取得 δ, 使 $|\Delta x| < \varepsilon$ 时,由

$$\left|\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} - X\right| \leqslant \left|\frac{u_2(x+\Delta x, y) - u_2(x, y)}{\Delta x} - X_2\right|$$

$$+ |X_1| + \left|\frac{u_1(x+\Delta x, y) - u_1(x, y)}{\Delta x}\right| = J_1 + J_2 + J_3 \quad (\text{定义})$$

分成的 J_1, J_2, J_3 都小于 $\frac{\varepsilon}{3}$.

先看 J_2. 由于

$$|X_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\iint_{r\leqslant\tau} \rho\frac{x-\xi}{r^2}\,d\xi d\eta\right| \leqslant \frac{C}{2\pi}\left|\iint_{r\leqslant\tau} \frac{x-\xi}{r^2}\,d\xi d\eta\right| \leqslant \frac{C}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\frac{d\xi d\eta}{r}$$

$$= \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau} dr d\theta = \tau c,$$

故可取 τ, 使 $|X_1| < \varepsilon/3$.

再看 J_3.

$$J_3 = \left|\frac{u_1(x+\Delta x, y) - u_1(x, y)}{\Delta x}\right|$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|2\pi}\left|\iint_K \rho\log\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta\right|,$$

由于三角形两边之差不大于第三边,所以

$$\left|\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} - \sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right| < |\Delta x|.$$

而 $|\log(1+t)| \leqslant |t|$，因此

$$\left|-\log\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{r}.$$

于是

$$J_3 \leqslant \frac{C}{2\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{r}$$

也是 τC，可以取 τ，使 $J_3 < \frac{\varepsilon}{3}$.

最后，当 τ 取定后，由于 (x, y) 在 K 内，即在 $\mathscr{D}-K$ 之外，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_2(x+\Delta x, y)-u_2(x, y)}{\Delta x} = X_2.$$

即可取 δ 使 $|\Delta x| < \delta$ 时，$|J_1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2）以上证明我们可用积分号下求微商法算出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. 但这方法并不能用来算二阶微商，其理由是

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log r d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^4}d\xi d\eta$$

是并不收敛的.

依然把 u 分拆成为 u_1+u_2，

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}d\xi d\eta,$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\iint_{r>\tau} \rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}d\xi d\eta.$$

在取定了 τ 之后，u_2 可以积分号下求微分，我们易证明 $\Delta u_2 = 0$.

现在看 u_1，由 1）已知

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \xi}\log\frac{1}{r}d\xi d\eta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho\log\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \log\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi d\eta.$$

由 Green 公式得出

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r<\tau} \rho\log\frac{1}{r}d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \log\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi d\eta.$$

与 1）相仿可以证明，这个式子可以积分号下求微商，即得

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r<\tau} \rho\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi d\eta = K_1 + K_2.$$

当 $\tau\to 0$ 时，

$$|K_2| \leqslant C_1\iint_{r\leqslant\tau} \frac{(x-\xi)}{r^2}d\xi d\eta \leqslant C_1\iint_{r\leqslant\tau} \frac{d\xi d\eta}{r} = 0(\tau).$$

在 K_1 中首先考虑 $\rho=1$ 的情况：命 $\xi = x + r\cos\theta$，$\eta = y + r\sin\theta$，则

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x-\xi}{r^2}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

因此当 $\tau \to 0$ 时，

$$K \to \frac{1}{2}\rho(x, y).$$

于是证得，当 $\tau \to 0$ 时，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \to \rho(x, y).$$

所以积分 (2) 适合于

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y).$$

§3. 双调和方程

求 $u(x, y)$ 使其在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续而且有一阶连续法微商 $\frac{\partial u}{\partial n}$，并且

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (\text{在 } \mathscr{D} \text{ 内}) \tag{1}$$

$$u|_C = g(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s). \tag{2}$$

这儿 $g(s)$ 与 $h(s)$ 是 C 上用弧长 s 确定的函数.

1) 解的唯一性. 如果还有一解 u_1，则 $v = u - u_1$ 适合于

$$\Delta\Delta v = 0, \quad v|_C = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_C = 0. \tag{3}$$

把 Green 公式

$$\iint_{\mathscr{D}} (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)dxdy = \int_C \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds$$

用到 $\varphi = v$, $\psi = \Delta v$ 上，则得

$$\iint_{\mathscr{D}} (\Delta v)^2 ds = 0.$$

因此得出 $\Delta v = 0$.

再由 $v|_C = 0$，可知 $v \equiv 0$，即得 $u = u_1$.

2) 用调和函数表双调和函数.

如果 u_1, u_2 是 $\mathscr{D}$ 中的两个调和函数，则函数 $u = xu_1 + u_2$ 一定是 $\mathscr{D}$ 的双调和函数.

利用恒等式

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

可得

$$\Delta u = \Delta x u_1 = 2\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

再由 $\Delta u_1 = 0$，可知

$$\Delta\Delta u = 0.$$

3）如果任一与 x 轴平行的直线不交 C 于两点以上，则有以下的逆定理。

$\mathscr{D}$ 的一个双调和函数 u 一定可以表成为 $u = xu_1 + u_2$，这儿 u_1, u_2 是 $\mathscr{D}$ 的调和函数.

证. 显然只要证明，可以找到一个调和函数 u_1 使 $u - xu_1$ 也是调和函数，即

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u = \Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{4}$$

函数

$$u_1^*(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, y) d\xi$$

适合于 (4) 的第二式，又

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u_1^*(x, y) = \Delta\frac{\partial}{\partial x}u_1^*(x, y) = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0,$$

即 Δu_1^* 与 x 无关，命之为

$$\Delta u_1^* = v(y).$$

显然可找到一个仅与 y 有关的函数 u_1^{**} 使

$$\Delta u_1^{**} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_1^{**} = -v(y).$$

合并起来 $u_1 = u_1^* + u_1^{**}$ 适合 (4) 式的前后两式，即得所证.

4）如果 $\mathscr{D}$ 是一星形区，即内有一点，不妨假定它就是原点. 过这点的射线只交 C 于一点，则 $\mathscr{D}$ 上的双调和函数一定可以表成为

$$u = (r^2 - r_0^2)u_1 + u_2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \qquad r_0 \text{是常数}.$$

这儿 u_1, u_2 是调和函数，也就待证，有一调和函数 u_1 使

$$\Delta(u - (r^2 - r_0^2)u_1) = 0.$$

利用恒等式

$$\Delta(\varphi\phi) = \varphi\Delta\phi + \phi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

及

$$\Delta r^2 = 4, \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

如前法，可得所证.

§4. 单位圆的双调和方程

对单位圆来说，我们不妨假定所考虑的双调和函数是

$$u = (r^2 - 1)u_1 + u_2$$

的形式，由边界条件可知

$$u_2|_{r=1} = u|_{r=1} = g(\theta).$$

由 Poisson 公式可知

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)g(\phi)}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \tag{1}$$

第二个边界条件是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 2u_1 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=1} = h(\theta).$$

由于 $2u_1 + r\dfrac{\partial u_2}{\partial r}$ 也是调和函数,所以

$$2u_1 + r\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)h(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi. \tag{2}$$

将 (1) 式对 r 求微商代入 (2) 式可以找到 u_1, 因此

$$u = (r^2-1)u_1 + u_2 = \frac{1}{2\pi}(r^2-1)\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h(\phi)d\phi}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\right.$$
$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{1-r\cos(\theta-\phi)}{(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)^2}g(\phi)d\phi\right].$$

如果把单位圆变为以原点为中心, r_0 为半径的圆,则解答是

$$u = \frac{1}{2\pi r_0}(r^2-r_0^2)\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h(\phi)d\phi}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}\right.$$
$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{(r_0-r\cos(\theta-\phi))g(\phi)}{(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)^2}d\phi\right].$$

习题 作出以上半平面为 $\mathscr{D}$ 的双调和方程的解.

§ 5. Cauchy 型积分的背景

在第四章 § 2 中已经定义了单位圆的 Cauchy 型积分, 现在来看看它的意义, 然后在下节中把它推广为任意的曲线.

在单位圆周上给了一个函数 $\varphi(\zeta)$, $\zeta = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 作为 θ 的函数, 它是一个以 2π 为周期的函数. 积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\zeta \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}-z} \tag{1}$$

称为一个 Cauchy 型积分.

假定 $\varphi(\zeta)$ 有 Fourier 展开式

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \tag{2}$$

则当 z 在单位圆内,有

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} z^m e^{-im\theta}.$$

由 $e^{-im\theta}$ 的正交性质,并假定可以逐项求积分,则得

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}\sum_{m=0}^{\infty} z^m e^{-im\theta}d\theta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \tag{3}$$

这是一个圆内的解析函数，并且有

$$\lim_{\rho\to 1-0} F(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\theta}. \tag{4}$$

这是由原 Founier 级数 (2) 的具非负指数诸项的和，以 $F^+(\xi)$ 表之．

如果 z 在单位圆外，则

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} = -\frac{\zeta}{z}\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{l}.$$

因此

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}\sum_{l=1}^{\infty} z^{-l}e^{il\theta}d\theta$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{C - e}{z^l}. \tag{5}$$

这是一个圆外的解析函数(包括 ∞)，而且

$$\lim_{\rho\to 1+0} F(\rho e^{i\theta}) = -\sum_{l=1}^{\infty} C_{-l}e^{-il\theta}. \tag{6}$$

这是由原级数 (2) 的具负指数诸项的和的反号，以 $F^-(\zeta)$ 表之．

显然易见

$$\varphi(\zeta) = F^+(\zeta) - F^-(\zeta). \tag{7}$$

再研究 $z = \zeta_0 = e^{i\theta_0}$ 是圆周上的一点的情况．先算出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta - \zeta_0}d\theta = \begin{cases}\frac{1}{2}\zeta_0^n, & 若\ n \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}\zeta_0^n, & 若\ n < 0.\end{cases} \tag{7'}$$

这积分是瑕积分．瑕点在 $\theta = \theta_0$．这积分应当理解为 0 到 $\theta_0 - \varepsilon$，再从 $\theta_0 + \varepsilon$ 到 2π，然后命 $\varepsilon \to 0$，即所谓这积分取 Cauchy 主值．

当 $n = 0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta}{\zeta - \zeta_0}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta}{\zeta - 1}d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{e^{\frac{1}{2}i\theta}}{e^{\frac{1}{2}i\theta} - e^{-\frac{1}{2}i\theta}}d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{2i\sin\frac{1}{2}\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2i\pi}\log\frac{\sin\frac{1}{2}(2\pi - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2}.$$

行归纳法，对 $n > 0$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta - \zeta_0}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\zeta^n + \frac{\zeta_0\zeta^n}{\zeta - \zeta_0}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\zeta_0\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^n}{\zeta - \zeta_0}d\theta.$$

即得所证. 当 $n=-l<0$ 时,由

$$\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{-l+1}}{\zeta-\zeta_0}d\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{l-1}}{\zeta^{-1}-\zeta_0^{-1}}d\theta$$

$$=\frac{\zeta_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^l}{\zeta_0-\zeta}d\theta=-\frac{1}{2}\zeta_0^l=-\frac{1}{2}(\bar{\zeta}_0)^{-l},$$

取共轭虚数可得 (7′) 式当 $n<0$ 的部分.

现在来考虑当 $z=\zeta_0$ 时积分 (1) 的意义. 它也是瑕积分,也取 Cauchy 主值,把 (2) 式代入 (1),如果允许可以逐项积分,则

$$F(\zeta_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta-\zeta_0}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta_0^n-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n\zeta_0^{-n}$$

$$=\frac{1}{2}(F^+(\zeta_0)+F^-(\zeta_0)). \tag{8}$$

与 (6) 联合得出

$$\left.\begin{aligned}F^+(\zeta)&=F(\zeta)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta),\\ F^-(\zeta)&=F(\zeta)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这是 Cauchy 型积分的主要公式.

如果在圆周上一段弧 r 之外取 $\varphi(\zeta)=0$, 则 (9) 式对 r 的一内点也成立,因之如果 (1) 的积分在一般圆弧上,结论 (9) 也是正确的.

再由保角变换基本定理,我们可望 (9) 式对一条任意弧的积分也对. 但是 Cauchy 型积分不是经保角变换而不变的,因此我们还须用第四章所用过的方法,为了避免这些麻烦我们还是从头做起.

§6. Cauchy 型积分

假定 C 是一条曲线, 有参变数表达式 $x=\phi(t)$, $y=\chi(t)$, 而且 $\phi(t)$ 与 $\chi(t)$ 有连续微商, $\varphi(\zeta)$ 是 C 上定义的函数. Cauchy 型积分指

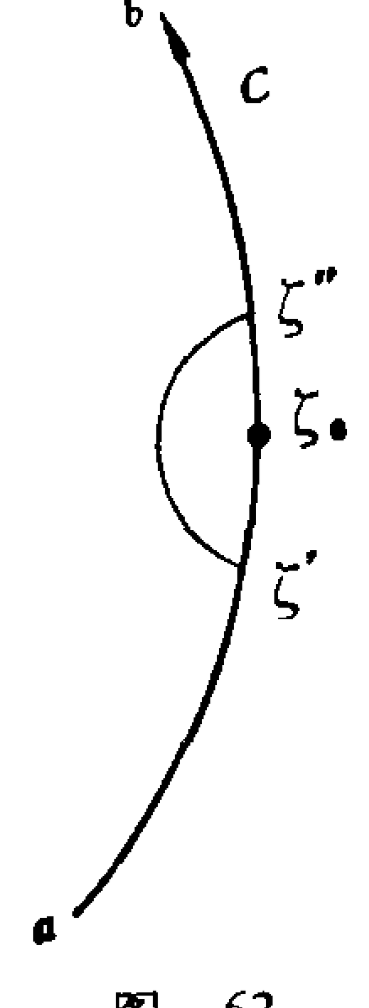


图 62

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{1}$$

关于 $\varphi(\zeta)$, 我们假定它适合 Hölder 条件

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)|\leqslant M|\zeta-\zeta_0|^\mu,\quad 0<\mu\leqslant 1.$$

如果 z 不在 C 上,则 (1) 显然存在而且代表 z 的解析函数,我们现在来说明 $z=\zeta_0$ 是 C 上的一点时,积分 (1) 的意义. 取定曲线 C 的方向,以 ζ_0 为中心 ε 为半径作圆交曲线 C 于两点 ζ', ζ''. 今往证明当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^{\zeta'}+\int_{\zeta''}^{b}\right)\frac{\zeta(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$$

的极限存在(注意由 a 到 b 先经 ζ' 再经 ζ''). 由 Hölder条件易知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta$$

是存在的．再看

$$\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\left(\int_a^{\zeta'}+\int_{\zeta''}^b\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\left(\log(\zeta-\zeta_0)|_a^{\zeta'}+\log(\zeta-\zeta_0)|_{\zeta''}^b\right)$$
$$=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\left(\log\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}-\log\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}\right),$$

在弧 $\widehat{a\zeta'}$ 与 $\widehat{\zeta''b}$ 上对数函数的分支如下法确定：$\log(\zeta-\zeta_0)$ 在 $\zeta=a$ 时确定后连续变到 $\zeta=\zeta'$，然后沿 $|z-\zeta_0|=\varepsilon$ 在曲线 C 的左边的那段弧移动连续变化到 $\zeta=\zeta''$ 的数值，因此

$$|\zeta-\zeta_0|=|\zeta''-\zeta_0|,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\log\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\pi. \tag{2}$$

（这是在 ζ_0 有切线的情况，如果在 ζ_0 处左右切线不同，这式子当有自然的改变．）于是，

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\varphi(\zeta_0)\log\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}+i\pi\varphi(\zeta_0)\right], \tag{3}$$

这称为积分的主值．如果曲线是封闭的，即 $a=b$，则 (2) 变为

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \tag{4}$$

附记．如果曲线 C 在 ζ_0 处有一角点，即左右二切线的夹角等于 α，则不难证明公式 (2) 变为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\log\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\alpha.$$

因而公式 (3) 就变为

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\varphi(\zeta_0)\log\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}\right]+\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0).$$

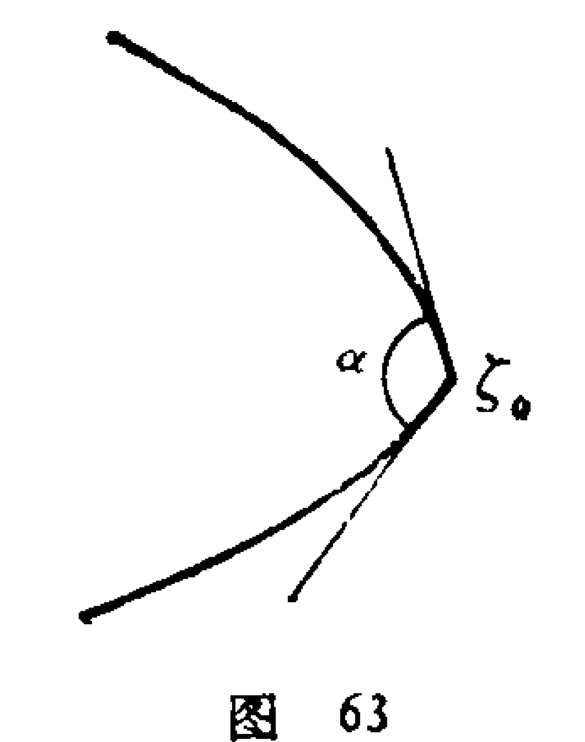


图 63

由此原则，不难处理有角点的情况．

§7. Сохоцкий 公式

引理． 假定 $\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 处适合 Hölder 条件，则

$$\lim_{z\to\zeta_0}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta,$$

z 趋于 ζ_0 适合以下的条件：命 $h=|z-\zeta_0|$，d 等于 z 到 C 上的点间的最短距离，比值 $\frac{h}{d}$ 有界．

证. 考虑这两积分的差额：

$$\Delta = \int_C (z - \zeta_0) \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta.$$



图 64

把这积分分为两份，其一适合于 $|\zeta - \zeta_0| < \delta$，它在此范围之外以 C' 表之. δ 是一待选的足够小的正数，命之为 $\Delta_1 + \Delta_2$.

关于前一积分，利用 Hölder 条件及 $|\zeta - z| \geqslant d$ 可知

$$|\Delta_1| \leqslant \int_C \frac{h}{d} \frac{M|\zeta - \zeta_0|^\mu}{|\zeta - \zeta_0|} |d\zeta| = \frac{hM}{d} \int_C |\zeta - \zeta_0|^{\mu-1} |d\zeta|.$$

由于 $|d\zeta| = |\sqrt{\phi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt| \leqslant A dt$，因此

$$|\Delta_1| \leqslant \frac{2h}{d} MA \int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\mu}} = O(\delta^\mu).$$

当 δ 足够小时，$|\Delta_r| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

其次 C' 中不包有 ζ_0，当 δ 固定时，积分

$$\int_{C'} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta$$

作为 z 的函数在 $z = \zeta_0$ 处连续，因此对足够小的 $h = |z - \zeta_0|$，$|\Delta_2|$ 也不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$，即我们有

$$|\Delta| \leqslant |\Delta_1| + |\Delta_2| < \varepsilon.$$

引理证毕.

附记. $\frac{h}{d}$ 有界的意义如下：以 ζ_0 为顶角，作二边，这两边都与切线留有角度(这样的角度在研究 Abel-Tauber 定理时已经用过，习惯称为 Stolz 角). 实质不难证明在 Stolz 角中，以上的极限公式是一致收敛的公式.

定理 1 (Сохоцкий). 假定 ζ_0 是 C 上的一点，但非端点；$\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta = \zeta_0$ 处适合 Hölder 条件，又当 $z \to \zeta_0$ 时常使比值 $\frac{h}{d}$ 有界，则当 z 从 C 的左方或右方趋于 ζ_0 时，Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1}$$

分别趋于

$$F^+(\zeta_0) = F(\zeta_0) + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0), \tag{2}$$

$$F^-(\zeta_0) = F(\zeta_0) - \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \tag{3}$$

式中 $F(\zeta_0)$ 是积分 (1) 的 Cauchy 主值.

证. 1) 假定 C 是封闭曲线，并且按定向进行，即依时针反向，则

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

由引理，为 $z \to \zeta_0$ 右端第一积分趋于 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$，而第二积分等于 $\varphi(\zeta_0)$ 或 0，视 z 在 C 内或 C 外而定．因此得极限公式

$$F^+(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta + \varphi(\zeta_0),$$

$$F^-(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.$$

由 § 6 公式 (4) 可得 Сохоцкий 公式．

2) 如果 C 不是闭曲线，我们可以添上一段 C'，使 $C + C' = C_0$ 成为一闭曲线，在 C' 上定义 $\varphi(\zeta) = 0$．注意，这样定义的曲线上函数可能不连续，但注意 1) 的讨论是局部性的，只要在 $\zeta = \zeta_0$ 附近适合 Hölder 条件即足．于是

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

如果 ζ_0 不是 C 的端点，则由 1) 可以推出一般定理．

由 Сохоцкий 公式立刻推出

当在 $\zeta = \zeta_0$ 处越过积分曲线 C 时，Couchy 积分 (1) 有一跃距

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0). \tag{4}$$

附记．如果 ζ_0 在曲线 C 上是一个角度为 α 的角点（注意右边角），则 Сохоцкий 公式可以改为

$$F^+(\zeta_0) = F(\zeta_0) + \frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0),$$

$$\theta < \alpha < 2\pi.$$

$$F^-(\zeta_0) = F(\zeta_0) - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0).$$

定理 2. 假定 C 是一条闭曲线，$\varphi(\zeta)$ 在 C 上适合 Hölder 条件，则 Cauchy 型积分成为 C 内的 Cauchy 积分的必要且充分条件是

$$\int_C \zeta^n\varphi(\zeta)d\zeta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots; \tag{5}$$

成为 C 的外部的 Cauchy 积分的必要且充分条件是

$$\int_C \zeta^{-m}\varphi(\zeta)d\zeta = 0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{6}$$

所谓 C 内 Cauchy 积分乃指 $\varphi(\zeta)$ 恰好等于 C 内的解析函数，$F(z)$ 趋于 C 上的边界值．

注．我们仅证 C 内．C 外或可由 C 内推出，或可简捷模仿证明．1) 充分性．在无穷远点处有展式

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

因此，在 $z = \infty$ 的附近

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_C \zeta^n\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{7}$$

利用条件 (5) 可知在 $z = \infty$ 的一邻域内 $F(z) \equiv 0$，由于 $F(z)$ 的解析性所以在 C 外 $F(z) \equiv 0$，因此 $F^-(\zeta) \equiv 0$．由定理 1 可知 $F(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta)$ 及 $F^+(\zeta) = \varphi(\zeta)$，即

在 C 的内部，Cauchy 型积分表一解析函数 $F(z)$. 当 z 趋于边界时,这函数就趋于积分号下出现的函数 $F^+(\zeta)=\varphi(\zeta)$.

2) 必要性. 如果 $F(z)$ 是一个 Cauchy 积分，对 C 外部的 z 来说，$\dfrac{\varphi(\omega)}{\omega-z}$ 是一个当 ω 在 C 内处处解析的函数,而且在 C 上是连续的,根据 Cauchy 定理

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0,\quad (z \text{ 在 } C \text{ 外})$$

因此 (7) 式所有的系数都等于 0，这便是条件 (6).

习题 1. 试把 Сохоцкий 的定理推广到单位正方形 $|x|=\frac{1}{2}$, $|y|=\frac{1}{2}$ 上，请特别注意在四角的情况.

习题 2. 假定 $\varphi(\zeta)$ 有有限个第一类间断点,对这些间断点定理应当如何修改? 注意 $\varphi(\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $0<\theta<2\pi$, C 是单位圆的情况.

§8. Hilbert-Привалов 问题

问题: 在封闭曲线 C 上给定两个复值函数 $a(\zeta)\neq 0$ 及 $b(\zeta)$ 都满足 Hölder 条件，求出两个函数 $f^+(z)$ 及 $f^-(z)$ 一个在 C 的内部另一在 C 的外部解析,并且在 C 上有

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)+b(\zeta).\tag{1}$$

这问题在数学物理中有各种重要应用.

在求解这问题前先试一下单位圆的情况: 假定 $a(\zeta)$ 与 $b(\zeta)$ 各有 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\zeta^n,\tag{2}$$

而 $f^-(\zeta)$ 与 $f^+(\zeta)$ 的 Fourier 展式各为

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n\zeta^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}d_n\zeta^n,\tag{3}$$

因此问题一变而为求 C_n, d_n 的问题了.

一眼看出,这问题有时无解. 例如, $a(\zeta)$ 只有正指数项及 $b(\zeta)=0$, 这样 (1) 式右边只有正指数项不可能等于左边.

又，这问题的解答也可能不唯一，因为如果取 $a(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}$, $b(\zeta)=0$, 则对任意的 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 常有

$$\left(a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\cdots+\frac{a_n}{\zeta^n}\right)=\frac{1}{\zeta^n}(a_n\zeta^n+\cdots+a_n).$$

Hilbert 原问题是 $b(\zeta)\equiv 0$, 一般问题是 Привалов 推广的，现在介绍 Гахов 的解如下·

1) $a(\zeta)=1$. 这特例特别容易,但这是解法的主要部分,因由 Сохоцкий 公式可知

$$F^+(\zeta)-F^-(\zeta)=\varphi(\zeta).$$

取 $\varphi(\zeta)=-b(\zeta)$, 则 Cauchy 型积分

$$f(z)=F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{b(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\tag{4}$$

就是原问题的一个解.

如果还有一解

$$g^+(\zeta)-g^-(\zeta)=\varphi(\zeta),$$

则得

$$f^+(\zeta)-g^+(\zeta)=f^-(\zeta)-g^-(\zeta).$$

即 $f^+(z)-g^+(z)$ 在 C 内代表一解析函数，$f^-(z)-g^-(z)$ 在 C 外代表一解析函数，而在 C 上完全吻合，因此二者构成整个平面上的解析函数(包括 ∞). 由 Liouville 定理可知它是一常数，即 (4) 加一常数是问题的一般解，而无其他解.

2) $b(\zeta)\equiv 0$.

21) 假定 $\log a(\zeta)$ 在 C 上是单值函数，则由

$$\log f^-(\zeta)=\log f^+(\zeta)+\log a(\zeta)$$

及 1) 可知这问题一定有以下的解

$$f^\pm(z)=Ae^{-F^\pm(z)},\quad F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\log a(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\tag{5}$$

这儿 A 是一常数.

22) 如果 $\log a(\zeta)$ 非单值函数，由于 $a(\zeta)$ 是单值函数，所以当 ζ 绕 C 一周，$\log a(\zeta)$ 增加 2π 的一个整倍数. 这整数称为指示数，也可以表成为

$$m=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg a(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\log a(\zeta).$$

不妨假定 C 是包有原点的，如是则

$$a_1(\zeta)=\zeta^{-m}a(\zeta)$$

的指示数为 0. 由 21) 已知有函数

$$g^\pm(z)=e^{-G^\pm(z)},\quad G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\log a_1(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

适合于

$$g^-(\zeta)=a_1(\zeta)g^+(\zeta).$$

因此求 $f^\pm$ 适合于

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)$$

的问题，一变而为求 $h^\pm$ 使

$$h^-(\zeta)=\zeta^m h^+(\zeta)\quad (f^\pm=g^\pm h^\pm)\tag{6}$$

的问题了.

221) 假定 $m=-n$ 是一负整数，则

$$h^+(z),\quad z^n h^-(z)$$

是在 C 上相等的函数. 因而它们相互是解析延拓. 由于 $h^-(z)$ 在 ∞ 处有则，因此这函数是一在 ∞ 有 n 阶极点的函数，即

$$h^+(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

而

$$h^-(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}.$$

因而

$$f^+(z) = (a_0 z^n + \cdots + a_n) e^{-G^+(z)},$$
$$f^-(z) = \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right) e^{-G^-(z)}, \tag{7}$$
而
$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\log(\zeta^{-m}a(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta. \tag{8}$$
其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是任意常数，并且 a_0 由 $f^-(\infty)$ 来决定.

不难证明，此外无其它解.

222）指示数 $m > 0$ 时，证明 Hilbert 问题无解. 由 (6) 可知 $h^-(z)$, $z^m h^+(z)$ 构成一解析函数，在整平面内处处有则，它是常数，但在 $z = 0$ 时这函数为 0，因此这常数为 0. 即 $h^- = h^+ \equiv 0$.

总结出

定理 1 (Гахов). 如果边界函数 $a(\zeta)$ 的指示数 $-n$ 不是正的，则 Hilbert 问题 $f(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta)$ 有 $n + 1$ 个线性独立的解. 不然，则无解.

§ 9. 续

现在考虑更一般的 Привалов 问题
$$f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) + b(\zeta). \tag{1}$$
仍命 $a(\zeta) = \zeta^m a_1(\zeta)$,
$$g^-(\zeta) = a_1(\zeta)g^+(\zeta), \tag{2}$$
$$g^\pm(z) = e^{-G^\pm(z)}, \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\log(\zeta^{-m}a(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta.$$
命 $f^\pm = g^\pm h^\pm$，则由 (1) 及 (2) 可知
$$h^-(\zeta) = \zeta^m h^+(\zeta) + b(\zeta)/g^-(\zeta). \tag{3}$$
当 $m = 0$ 时，这就是上节 1)，因而有解.
$$h^\pm(z) = A + H^\pm(z),$$
$$H(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta, \tag{4}$$
这儿 A 是一任意常数. 因此
$$f^\pm(z) = e^{-G^\pm(z)}\{A + H^\pm(z)\}. \tag{5}$$
也不难证明此外无它解.

当 $m = -n < 0$ 时，
$$h^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + H^-(z),$$
$$h^+(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n + z^n H^+(z),$$
即得
$$\left.\begin{aligned} f^-(z) &= \left\{a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z_n} + H^-(z)\right\} e^{-G^-(z)}, \\ f^+(z) &= \{a_0 z^n + \cdots + a_n + z^n H^+(z)\} e^{-G^+(z)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

也易于证明这是所有的解.

最后如果指示数 $m > 0$，则

$$h^-(\zeta) = \zeta^m h^+(\zeta) + b(\zeta)e^{G^-(\zeta)},$$

这方程为

$$h^-(z) = A + H^-(z), \quad h^+(z) = \frac{A + H^+(z)}{z^m}. \tag{7}$$

满足并且容易证明,仅有这两个函数才能适合 (7).

看怎样的 $H^+(z)$ 才使 $h^+(z)$ 有则,展开 $H^+(z)$，即

$$\begin{aligned} H^+(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right)z^n. \end{aligned}$$

如果要使 $h^+(z)$ 有则,则 A 可以取为等于上式的常数值,而且必须有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, m. \tag{8}$$

故当 $m > 0$ 时,只当 (8) 式满足，Привалов 问题才有解.

总之

定理 1 (Гахов). 如果边界函数的指示数 $-n \leqslant 0$，则 Привалов 问题 $f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) + b(\zeta)$ 有带 $n+1$ 个参变数的解 (6). 如果 $a(\zeta)$ 的指示数 $m > 0$，则问题仅当适合 (8) 时才能有解.

习题 1. 读者试考虑 $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ 可能有间断点的情况.

习题 2. 试考虑非闭曲线的情况.

§ 10. Riemann-Hilbert 问题

闭曲线 C 围绕一个域 $\mathscr{D}$；$a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$ 是 C 上定义的实函数. 问题是：求一个在 $\mathscr{D}$ 内解析,在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续的函数

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

使在 C 上满足于

$$a(\zeta)u(\zeta) - b(\zeta)v(\zeta) = c(\zeta). \tag{1}$$

Мусхелишвили 的解法：假定 $\mathscr{D}$ 就是单位圆（这不失其普遍性）$|z| < 1$，并假定 $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$ 都适合于 Hölder 条件,并且假定在 C 上处处 $a^2(\zeta) + b^2(\zeta) \neq 0$，(1) 可以改写成为

$$2\mathscr{R}((a + ib)f(\zeta)) = (a + bi)f(\zeta) + (a - bi)\overline{f(\zeta)} = 2c. \tag{2}$$

通过 Привалов 问题，我们找出两个解析函数 $F^+(z)$, $F^-(z)$，一在圆内一在圆外，使

$$(a + bi)F^+(\zeta) + (a - bi)F^-(\zeta) = 2c. \tag{3}$$

再作

$$F_*^+(z) = \overline{F^-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad F_*^-(z) = \overline{F^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

它们也是一个在圆内一个在圆外的解析函数，而且它们也适合于条件(3)．其理由是：(3)式的共轭式子是

$$(a - bi)\overline{F^+\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} + (a + bi)\overline{F^-\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} = 2c,$$

即得

$$(a + bi)F_*^+(z) + (a - bi)F_*^-(z) = 2c. \tag{4}$$

命 $f(z) = F^+(z) + F_*^+(z)$，则

$$\overline{f(\zeta)} = \overline{F^+\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} + \overline{F_*^+\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} = F_*^-(\zeta) + F^-(\zeta).$$

(3)加(4)得出

$$(a + bi)f(\zeta) + (a - bc)\overline{f(\zeta)} = 2c.$$

附记．命 $f_1(z)$ 是 $f(z)$ 的积分，即 $\frac{df_1}{dz} = f$，命 $f_1(z) = u_1 + iv_1$，则

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u, \ \frac{\partial v_1}{\partial x} = v = -\frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

因此(1)式可以改写为

$$a(\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial x} + b(\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_C = c(\zeta). \tag{5}$$

因而 Riemann-Hilbert 问题可以看成为：求适合边界条件(5)的调和函数 u_1，这可以看成为 Neumann 问题的推广．反之，也可以把广义 Neumann 问题化成为 Riemann-Hilbert 问题．

§11. 混合边界值问题解答的唯一性

混合边界值问题：闭曲线 C 包有一区域 $\mathscr{D}$，在 C 上依次取 $2n$ 点 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$ (为了方便起见定义 $a_{n+1} = a_1$)，求出一个 $\mathscr{D}$ 内的解析函数，使其在由 a_k 到 b_k 的一段弧上，它的实部等于一给定函数 $\varphi_k(\zeta)$，在由 b_k 到 a_{k+1} 的一段弧上，它的虚部等于一给定函数 $\psi_k(\zeta)$，$k = 1, 2, \cdots, n$.

当然我们假定除去 a_k, b_k 诸点外，在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上，这函数是连续的．我们还常假定 $\varphi_k(\zeta)$, $\psi_k(\zeta)$ 在对应的区间上适合 Hölder 条件．

这问题也可作为 Riemann-Hilbert 问题的特例．

我们现在考虑 $\mathscr{D}$ 是上半平面的情况，而且假定

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n.$$

今后我们用 (b_n, a_{n+1}) 代表两区间 $b_n < x < \infty$, $-\infty < x < a_{n+1}$ 的总和．命 $f(z) = u(z) + iv(z)$，则混合边界条件就是

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_k(x), \quad 当\ a_k < x < b_k, \\ v &= \psi_k(x), \quad 当\ b_k < x < a_{k+1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这儿 $k=1, 2, \cdots, n$，且在 (b_n, a_{n+1}) 上 $v=0$.

1）我们现在先研究一个特别重要的特例：$\varphi_k(x)=0$，$\psi_k(x)=0$.

在线段 (b_{k-1}, a_k) 上，由假定可知 $v(x)=0$，即 $f(z)$ 是实的，即 $W=f(z)$ 把实线段 (b_{k-1}, a_k) 变为实线段. 因此函数 $f(z)$ 可以经过 (b_{k-1}, a_k) 解析拓展到下半平面. 而且 $f(x-iy)=u(z)-iv(z)$. 又在 (a_k, b_k) 上，$f(z)$ 是纯虚的，因此经过 (a_k, b_k) 也可以把 $f(z)$ 解析拓展到下半平面. 而且 $f(x-iy)=-u(z)+iv(z)$. 因此，绕点 a_k 一周，函数 $f(z)$ 变为 $-f(z)$.

函数

$$g(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{z-b_k}} \tag{2}$$

与 $f(z)$ 有同前所述的性质. 当 $x<a_1$ 时，我们取 $g(z)$ 是正的一分支，这函数显然有以下的性质

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{R}g(x)&=0, \quad 当\ a_k<x<b_k,\\ \mathscr{I}g(x)&=0, \quad 当\ b_k<x<a_{k+1}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

且绕 a_k 或 b_k 一周，$g(z)$ 变为 $-g(z)$.

函数

$$\frac{f(t)}{g(t)}=p(z) \tag{4}$$

在整个平面上是单值函数，而且除去 a_k, b_k 及 ∞ 外无处不解析. 反之，给了一个有这样性质的 $p(z)$，则

$$f(z)=g(z)p(z)$$

就是问题的一般解，显然解不是唯一的.

为了唯一性，我们不得不加一些条件使 $p(z)$ 变为常数. 我们加上如下条件

(i) $$f(z)=O(|z-a_k|^{-\frac{1}{2}}), \quad 当\ z\to a_k\ 时,$$

使 $p(z)$ 在孤立奇点 $z=a_k$ 处，

$$p(z)=O(|z-a_k|^{-1}),$$

即 $p(z)$ 在 $z=a_k$ 处有则.

同样加上

(ii) $$f(z)=O(|z-b_k|^{-\frac{3}{2}}), \quad 当\ z\to b_k\ 时,$$

使 $p(z)$ 在 $z=b_k$ 处有则.

再假定，当 $z\to\infty$ 时

(iii) $$f(z)\to C,$$

则 $p(z)$ 在 $z=\infty$ 也有则，因此它是一个常数 C[1]. 即适合于条件 (i), (ii), (iii) 与混合边界条件 (3) 的问题有唯一解：

$$f(z)=Cg(z)=C\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{z-b_k}}.$$

2）一般问题的解的唯一性问题. 假定有两个函数 $f(z)$, $f_1(z)$ 都适合于

1）不难证明 $p(z)$ 在全平面上解析.

$$u_1(x) = u(x) = \varphi_k(x), \quad a_k < x < b_k,$$
$$v_1(x) = v(x) = \psi_k(x), \quad b_k < x < a_{k+1},$$
及条件 (i), (ii), (iii), 则 $f(z) - f_1(z)$ 就是所讨论过的问题. 而且条件 (iii) 变为
$$\lim_{z\to\infty} (f(z) - f_1(z)) = 0,$$
因此得出 $f(z) \equiv f_1(z)$.

§ 12. Келдыш-Седов 公式

1) 考虑函数
$$2\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}$$
在线段 $a_k < t < b_k$ 上的 Cauchy 型积分
$$\frac{f_k(z)}{g(z)} = \frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k} \frac{\varphi_k(t)}{g(t)} \frac{dt}{t-z}, \tag{1}$$
当 $z = t_1$, $b_l<t_1<a_{l+1}(l = 1, 2, \cdots, n)$ 时, $g(t_1)$ 是实的, $g(t)$ 是纯虚的, 所以 $f_k(t_1)$ 是实的, 即
$$v_k(t_1) = \mathscr{I} f_k(t_1) = 0. \tag{2}$$
其次, 当 $z = t_2$, $a_l < t_2 < b_l(l = 1, 2, \cdots, n, l \neq k)$ 时, $g(t_2)$ 与 $g(t)$ 都是纯虚的, 因此 $f_k(t_2)$ 是纯虚的, 即
$$u_k(t_2) = \mathscr{R} f_k(t_2) = 0. \tag{3}$$
现在考虑 $a_k < t_0 < b_k$. 当 z 由上半平面趋于 t_0 时, Cauchy 型积分的值等于 (Сохоцкий 公式)
$$\frac{f_k^+(t_0)}{g(t_0)} = \frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k} \frac{\varphi_k(t)}{g(t)} \frac{dt}{t-t_0}.$$
这儿积分取 Cauchy 主值, 由 § 6 (3) 可知它等于
$$\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{\varphi_k(t)}{g(t)} - \frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\right)\frac{dt}{t-t_0} + \frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\log\frac{b_k - t_0}{a_k - t_0}.$$
由于
$$\log\frac{b_k - t_0}{a_k - t_0} = \log\frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k} - i\pi,$$
所以
$$\frac{f_k^+(t_0)}{g(t_0)} = \frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{\varphi_k(t)}{g(t)} - \frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\right)\frac{dt}{t-t_0}$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\log\frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}, \tag{4}$$
乘以 $g(t_0)$, 立见
$$\mathscr{R} f_k^+(t_0) = \varphi_k(t_0). \tag{5}$$
也就是 (1) 所定义的 Caucky 积分 $f_k(z)$ 适合于混边界条件 (2), (3), (5).

2）现在来证明 $f_k(z)$ 适合于上面所提出的条件 (i), (ii), (iii), ($c=0$).

当 $z\to\infty$ 时，显然有 $f_k(z)\to 0$，也不难证明当 $z\to a_l$ 或 $b_l(l\neq k)$ 时，

$$\frac{f_k(z)}{g(z)}=O(1).$$

即 $f_k(z)=O(|z-a_l|^{\frac{1}{2}})$，及 $f_k(z)=O(|z-b_l|^{-\frac{1}{2}})$. 因此在 $z=a_l$, b_l 附近，条件 (i), (ii) 是适合的.

由 (4) 可见，当 $t_0\to a_k$ 时，

$$\frac{f_k^+(t_0)}{g(t_0)}=O\left(|t_0-a_k|^{-\frac{1}{2}}\log\frac{1}{|t_0-a_k|}\right),$$

即

$$f_k^+(t_0)=O\left(\log\frac{1}{|t_0-a_k|}\right).$$

当 z 在上半平面趋于 a_k 时，问题较易，但由于没有与 (4) 相仿的公式，所以处理起来表面上更麻烦一些. 命 $c_K=\frac{1}{2}(a_k+b_K)$，则当 $z\to a_k$ 时显然有

$$\int_{c_k}^{b_k}\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z}=O(1).$$

并注意，当 $\varphi(t)$ 有界时

$$\int_{a_k}^{c_k}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t-a_k}}\frac{dt}{t-z}=\int_0^{c_k-a_k}\frac{\varphi(u+a_0)}{\sqrt{u}(u-w)}du\quad(w=z-a_k),$$

$$=\frac{1}{w^{1/2}}\int_0^{(c_k-a_k)/w}\frac{\varphi(\tau_w+a_k)}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau-1)}d\tau\quad(u=\tau w).$$

当 τ 在 0 附近，由于 $\int\frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}}}$ 的收敛性；当 τ 在 ∞ 附近，由于 $\int_\tau^{-3/2}d\tau$ 的收敛性；由于 w 非实的，积分在 $\tau=1$ 附近可以得出 $O\left(\log\frac{1}{|w|}\right)$. 因此，我们仍然有

$$f_k(z)=O\left(\log\frac{1}{|z-a_k|}\right).$$

因此当 $z\to a_k$, $z\to b_k$ 时，条件 (i), (ii) 都适合.（注意，这函数可以适合比 (i), (ii) 更严紧的条件. 换言之，在较宽条件 (i), (ii) 之下，我们仍能得出唯一性解答.）

3）同样可以证明：Cauchy 型积分

$$f_k^*(z)=\frac{g(t)}{\pi}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{\psi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z}$$

适合于 (i), (ii) 及 (iii)（其中 $c=0$）及以下的边界条件：

$$\begin{aligned}\mathscr{R}f_k^*(z)&=0, &&\text{当 } a_l<t<b_l,\ l=1,2,\cdots,n,\\ \mathscr{I}f_k^*(z)&=\psi_k(t), &&\text{当 } b_k<t<a_{k+1},\\ &=0, &&\text{当 } b_l<t<a_{l+1},\ l\neq k.\end{aligned}$$

4）相加得 Келдыш-Седов 公式

$$f(z)=\sum_{k=1}^n f_k(z)+\sum_{k=1}^n f_k^*(z)+cg(z)$$

适合于 (i), (ii), (iii) 及所给的边界条件

因此得 Келдыш-Седов 公式.

定理 1. 上半平面的混合边值问题有且只有一个适合于以下三条件的解：(i) 当 $z \to a_k$ 时，$f(z) = O(|z - a_k|^{-\frac{1}{2}})$；(ii) 当 $z \to b_k$ 时，$f(z) = O(|z - b_k|^{-\frac{3}{2}})$；(iii) 当 z 在上半平面上趋向 ∞ 时，$f(z)$ 趋于一实数 C，这解由以下的公式给出

$$f(z) = \frac{g(z)}{\pi i}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z} + i\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{\psi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z} + \pi i c\right).$$

§ 13. 其他域的 Келдыш-Седов 公式

1）利用保角变换

$$z = \frac{-iw}{w-1}$$

把上半平面 $\mathscr{I}z > 0$ 变为以 $\frac{1}{2}$ 为中心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆，它把 a_k, b_k 变为 α_k, β_k，则

$$\frac{z-a_k}{z-b_k} = \left(\frac{w}{w-1} - \frac{\alpha_k}{\alpha_k - 1}\right)\Big/\left(\frac{w}{w-1} - \frac{\beta_k}{\beta_k - 1}\right)$$
$$= \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k}\Big/\frac{1-\alpha_k}{1-\beta_k}.$$

代入 Келдыш-Седов 公式（为了简单起见我们假定 $f(\infty) = 0$），把符号 w, α_k, β_k 换成 z, a_k, b_k，则得公式

$$f(z) = \frac{g(z)}{\pi i}\int_C \frac{\tau(\zeta)}{g(\zeta)(\zeta - z)}\frac{z-1}{\zeta-1}d\zeta.$$

这儿 C 代表圆周 $\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$，$\tau(\zeta)$ 在弧 (a_k, b_k) 上等于 $\varphi_k(\zeta)$，在 (b_k, a_{k+1}) 上等于 $i\psi_k(\zeta)$.

2）读者试自己推出单位圆的情况. 这时 Келдыш-Седов 公式的形状是

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)}\int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{2\zeta}\right)d\zeta$$
$$+ \sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{(z-a_k)(z-b_k)}}\,(C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \cdots + C_n).$$

这儿 $C_0, \cdots, C_n$ 是复常数.

图 65

3）为了下面应用方便起见，我们处理一个半圆

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

$y > 0$ 的问题，并且假定在半圆周上

$$u(z)|_C = \varphi(\zeta),$$

及在直径 $y = 0$ 上

$$u(z) + v(z)|_{y=0} = \chi(x),$$

并假定 $\varphi(\zeta)$, $\chi(x)$ 都适合 Hölder 条件.

这问题既可以用 § 11, 12 的方法从头处理，也可以直接应用以前的结果.

命 $f_1(z)$ 是适合于

$$u_1(z)|_C = \varphi(\zeta),\ u_1(z) + v_1(z)|_{y=0} = 0$$

的解. $w = f_1(z)$ 将实轴变为 $u + v = 0$. 由对称原理可知函数 $f_1(z)$ 可以解析延拓到下半圆 c^*:

$$f_1(x - iy) = -v_1(x, y) - iu_1(x, y). \tag{1}$$

因此在下半圆周上

$$\mathscr{I} f_1(z) = -\varphi(\bar{\zeta}).$$

由 1) 可知

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\left\{\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - i\int_{C^*}\sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\frac{\varphi(\bar{\zeta})d\zeta}{\zeta - z}\right\}. \tag{2}$$

圆 $x^2 + y^2 - x = 0$ 的极坐标写法是 $\rho = \cos\theta$, 即 $\zeta = \cos\theta e^{i\theta}$. 当 $0 < \theta < \pi$ 代表上半圆,而 $0 > \theta > -\pi$ 代表下半圆时,显见

$$1 - \zeta = -i\sin\theta e^{i\theta},\quad d\zeta = ie^{2i\theta}d\theta.$$

使用变换 $\theta = -\tau$ (并以 w 代 $\bar{\zeta}$), 则得

$$\int_{C^*} = i\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{w(1-w)}}\frac{\varphi(w)dw}{w - ze^{2i\tau}}.$$

再由 $e^{2i\tau} = 2\cos^2\tau - 1 + 2i\sin\tau\cos\tau = 2\cos\tau e^{i\tau} - 1 = 2w - 1$, 并将积分中的变数 w 换成为 ζ, 则 (2) 中的两个积分可以合而为一

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\left\{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z - 2\zeta z}\right\}\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{3}$$

命 $f_2(z)$ 适合于

$$u_2(z)|_C = 0,\ u_2(z) + v_2(z)|_{y=0} = \chi(x).$$

$w = f_2(z)$ 把上半圆周变虚轴,因此 $f_2(z)$ 可以通过 C 而解析拓展到整个上半平面. 按照对称原理,实轴上依圆 C 对称的两点 x, $\frac{x}{2x-1}$, $f_2(z)$ 所取的数值是依虚轴 ($u_2 = 0$) 对称的数值,即

$$f_2(x) = -u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + iv_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right).$$

我们已知,在 $(0, 1)$ 上

$$\mathscr{R}\{(1-i)f_2(x)\} = u_2(x, 0) + v_2(x, 0) = \chi(x),$$

在 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ 上

$$\mathscr{I}\{(1-i)f_2(x)\} = v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) = \chi\left(\frac{x}{2x-1}\right),$$

所以可以把上半平面的 Келдыш-Седов 公式用到这问题上来. 经过简单变换得出

$$(1-i)f_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t + z - 2tz}\right)\chi(t)dt. \tag{4}$$

一般问题的解等于

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

附记. 考虑 $\varphi(\zeta) = 0$, $\chi(x) = 0$ 的情况. 容易看出任意平面上对实轴求对称一次,对圆求对称一次,即在 z 平面上绕 $z = 0$ (或 $z = 1$) 转 180°. $w = f(z)$ 依 $u+v = 0$ 求对称一次,对虚轴求对称一次,即 w 在 z 平面上转 90°. 因此当 z 绕 0 (或 1) 一周 w 正好变号,因此函数

$$p(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{z(1-z)}}$$

是一个在全平面上的单值函数. 由条件可知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \rho(1-i)$, ρ 是实数,由对圆的对称关系可知 $f(\infty) = -\rho(1+i)$, 因此当 $z \to \infty$ 时, $p(z) \to 0$.

如果假定 $f(z) = o(|z|^{-\frac{1}{2}})$ 及 $f(z) = o(|1-z|^{-\frac{1}{2}})$, 即 $p(z) = o(|z|^{-1})$, 这说明单值函数不能在 $z = 0$ 外有奇点,同样,在 $z = 1$ 也不能有奇点,因此 $p(z)$ 是零. 即在这样的条件下,问题的解答是唯一的.

如果我们假定了

$$\frac{\partial u}{\partial x} = o(|z|^{-\frac{3}{2}}), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = o(|z|^{-\frac{3}{2}}),$$

则得

$$f'(z) = o(|z|^{-\frac{3}{2}}).$$

若 $u(0, 0) = u(1, 0) = 0$, 则推出 $f(z) = o(|z|^{-\frac{1}{2}})$.

§ 14. 一个混合型偏微分方程

我们现在来研究 Лаврентьев 偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

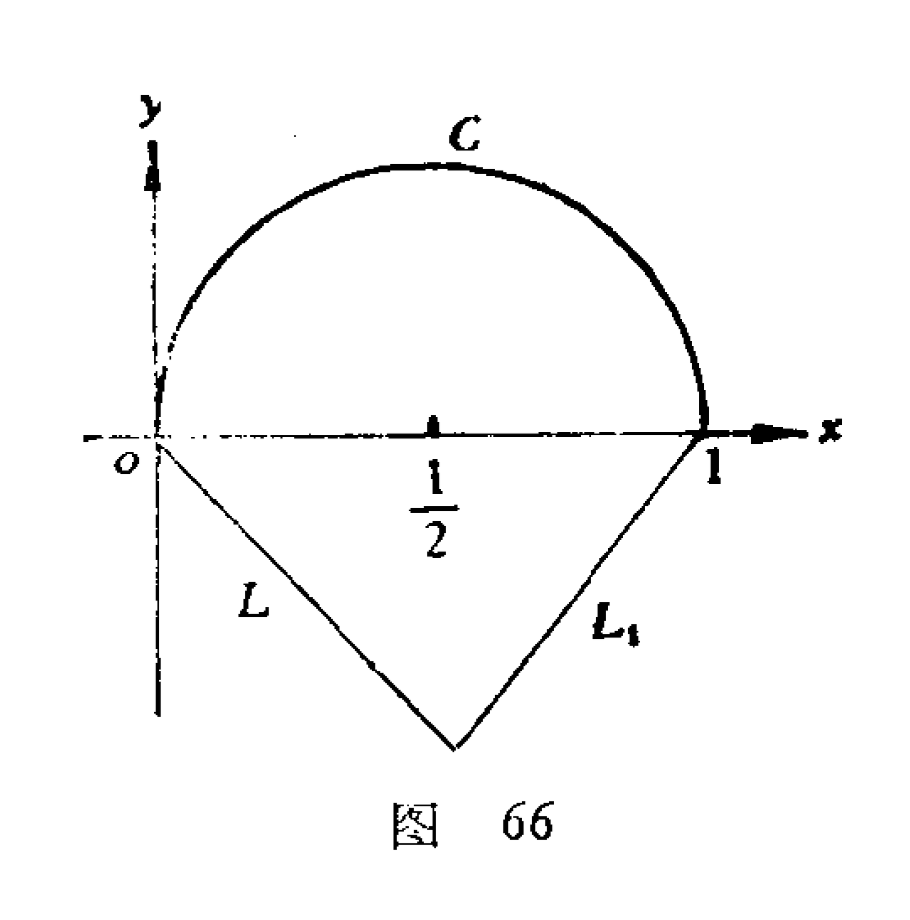


图 66

这儿 $\theta(y) = \pm 1$, 视 $y \gtrless 0$ 而定.

所考虑的区域 $\mathscr{D}$ 是被以下的线段所包围的:以 $z = \frac{1}{2}$ 为中心, $\frac{1}{2}$ 为半径的上半个圆

$$C: \qquad \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad y > 0,$$

从 0 及 1 所发出的两线段

$$L: \qquad x + y = 0,$$

$$L_1: \qquad x - y = 1.$$

在 C 上给一个函数 $\varphi(\zeta)$, 在 L 上给一函数 $\psi(x)$, 并且假定它们都适合 Hölder 条件,且 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

问题: 求出 $u(x, y)$, 使适合以下的一些要求:

(i) 在 $\pm\mathscr{D}$ 上当 $y \neq 0$ 时, u 适合于方程 (1);

(ii) 在闭域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续, $u|_C = \varphi(\zeta)$, $u|_L = \psi(x)$;

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 在 $\mathscr{D}$ 内部连续;

(iv) 在 $z=0$ 及 $z=1$ 附近, $\frac{\partial u}{\partial x}=o(x^{-\frac{3}{2}})$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0(x^{-\frac{3}{2}})$, $\frac{\partial u}{\partial x}=o(|x-1|^{-3/2})$, $\frac{\partial u}{\partial y}=o(|x-1|^{-3/2})$.

Бицадзе 的解法是:

1) 在下半平面上,方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

的解可以表成为

$$u=\Phi(x+y)+\Psi(x-y). \tag{2}$$

这儿 Φ, Ψ 是任意两个函数,由条件 (ii) 知道

$$u|_L=\Phi(0)+\Psi(2x)=\psi(x).$$

因此

$$u=\Phi(x+y)-\Phi(0)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{3}$$

由 (ii) 可知

$$u(x, 0)=\Phi(x)-\Phi(0)+\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{4}$$

在上半平面 $u(x, y)$ 是调和函数. 命 $v(x, y)$ 表它的共轭函数,而且 $v(0, 0)=0$. 由 (3) 已知在下半平面上

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\Phi'(x+y)-\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

由 (iii), $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的连续性可知,在 x 轴上

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\Phi'(x)+\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x}{2}\right),$$

积分之,得

$$v(x, 0)=-\Phi(x)+\Phi(0)+\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{5}$$

与 (4) 相加得

$$u(x, 0)+v(x, 0)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{6}$$

因此问题一变而为上节所讨论过的问题,即求适合于

$$u|_C=\varphi(\zeta),$$

$$u+v|_{y=0}=2\chi\langle x\rangle=2\psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

的调和函数的问题了. 因而唯一性与存在性都在上节 3) 中讨论过了.

现在我们来证明解的唯一性. 不妨假设函数 u 在 L 和 C 上为零. 由 (6) 即得

$$u(x, 0)+v(x, 0)=0. \tag{6'}$$

设K是以$(\xi, 0)$为中心，ε为半径的且整个在$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$内的圆.令$C_K$和$\bar{C}_K$分别表示$K$的上半圆周和下半圆周.于是圆$K$内函数$F(z)$的值是由它的实部分在$C_k$上的值唯一定义的，也就是求在圆$K$内是全纯的而在闭圆$\bar{K}$上是连续的函数$F(z)$，它具有边界条件

$$\begin{aligned} \mathscr{R}F(z) &= u(x, y), \qquad z \in C_K; \\ \mathscr{I}F(z) &= -u(x, -y), \qquad z \in \bar{C}_K. \end{aligned} \tag{7}$$

由 Келдыш-Седов 公式立得

$$\begin{aligned} F(z) = &\frac{1}{\pi i}\int_{C_K}\sqrt{\frac{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{u(t)}{t-z}dt \\ &-\frac{1}{\pi}\int_{\bar{C}_K}\sqrt{\frac{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{u(\bar{t})}{t-z}dt. \end{aligned} \tag{8}$$

令$z=\xi$，并作变换$t=\xi+\varepsilon e^{i\theta}$，由(8)式立得

$$F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})}{\sqrt{1-e^{2i\theta}}}d\theta-\frac{i}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{u(\xi+\varepsilon e^{-i\theta})}{\sqrt{1-e^{2i\theta}}}d\theta.$$

对后一积分作变换$\theta=2\pi-\varphi$，且注意

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2i\varphi}}}=\frac{e^{i\varphi}}{i\sqrt{1-e^{2i\varphi}}},$$

即得

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})\sqrt{\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}}d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{\frac{1}{i}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\,u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

由此立得

$$u(\xi, 0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\,u(\theta)d\theta. \tag{9}$$

由(9)式我们可以证明$u(x, y)$在实轴上的线段$(0, 1)$上不可能取正的极大值或负的极小值. 否则，若u在点$(\xi, 0)$处达到正的极大值M，我们可找到在一个以$(\xi, 0)$为中心充分小的ε为半径的圆周C_K上的一点$\xi+\varepsilon e^{i\theta}$，使$|u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})|<M$，由(9)，且注意

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\,d\theta=1,$$

即有

$$u(\xi, 0)=M=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\,u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})d\theta<\frac{1}{\pi}M\int_0^M\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\,d\theta=M.$$

同样可以证明u不可能在线段$(0, 1)$上达到负的极小值. 又由于$u(0, 0)=u(1, 0)=0$，因此$u(x, 0)$在线段$(0, 1)$上为零，从而u在域$\mathscr{D}$内恒等于零.

第十三章　Weierstrass 的椭圆函数论

§1. 模

定义 1. 命M是一个数集，如果其中任意二数的和差都在这集中，这集称为模.

例 1. 所有的自然数成一模，同样

$$nw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

也成一模.

例 2. 所有的有理数也成一模.

例 3. 所有的实数也成一模.

例 4. 所有的复数也成一模.

例 5. 所有形如

$$a + b_i, \quad a, b = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

的数也成一模.

定义 2. 如果模M中有n个数 $w_1, \cdots, w_n$，使模中任一数w可以唯一地表成为

$$P_1 w_1 + \cdots + P_n w_n, \quad (P \text{ 是整数})$$

的形式，则 $w_1, \cdots, w_n$ 成为M的底. n 称为模M的秩数.

例 1 的底是w，其秩是一.

例 5 的底是 $1, i$，其秩是二.

如果模M有另一底 $w'_1, \cdots, w'_m$，则由定义可知

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w'_j, \quad w'_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} w_k.$$

所以

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} w_k.$$

由定义可知表法是唯一的，因此

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = k; \\ 0, & \text{若 } i \neq k. \end{cases}$$

因此 (a_{ij}), (b_{jk}) 是二可求逆的矩阵，因此 $m = n$.

定理 1. 如果模M还有一底 $w'_1, \cdots, w'_m$，则 $m = n$，而且其间的关系

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w'_j, \quad j = 1, \cdots, n$$

可以一个行列式等于 ± 1 的方阵 (a_{ij}) 表之.

定理 2. 没有有限聚点的实模的秩数是 1，也就是存在一个w，使这模就是

$$mw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

所成的模.

假定 w 是 M 中最小的正数，如果 $nw(n=0,\pm1,\cdots)$ 之外另有一数 w'，则 $w'=(n+\vartheta)w$，$0<\vartheta<1$，而 $0<w-nw<w$，这与假定相违背.

推广些有

定理 3. 没有有限聚点而每两数之比是实数的模一定是一秩模.

定理 4. 没有有限聚点的复数模的秩数只能是一或二.

证. 1) 在平面上记下这模的诸点. 假定 w 是最近于原点之一.通过 $0, w$ 作直线 L，在这直线上仅有 $mw(u=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 M 的点而无其它(定理 3)，如果此处无其它的点,则这模是一维的.

2) 假定不然,以原点为中心作一圆. 除 L 的点以外,在圆内无 M 的其它点,但在周界上有 M 的点. 由于无聚点,圆周上的点不能无穷,我们有一点 w'，它与 w 的圆心角最小. 现在证明,除

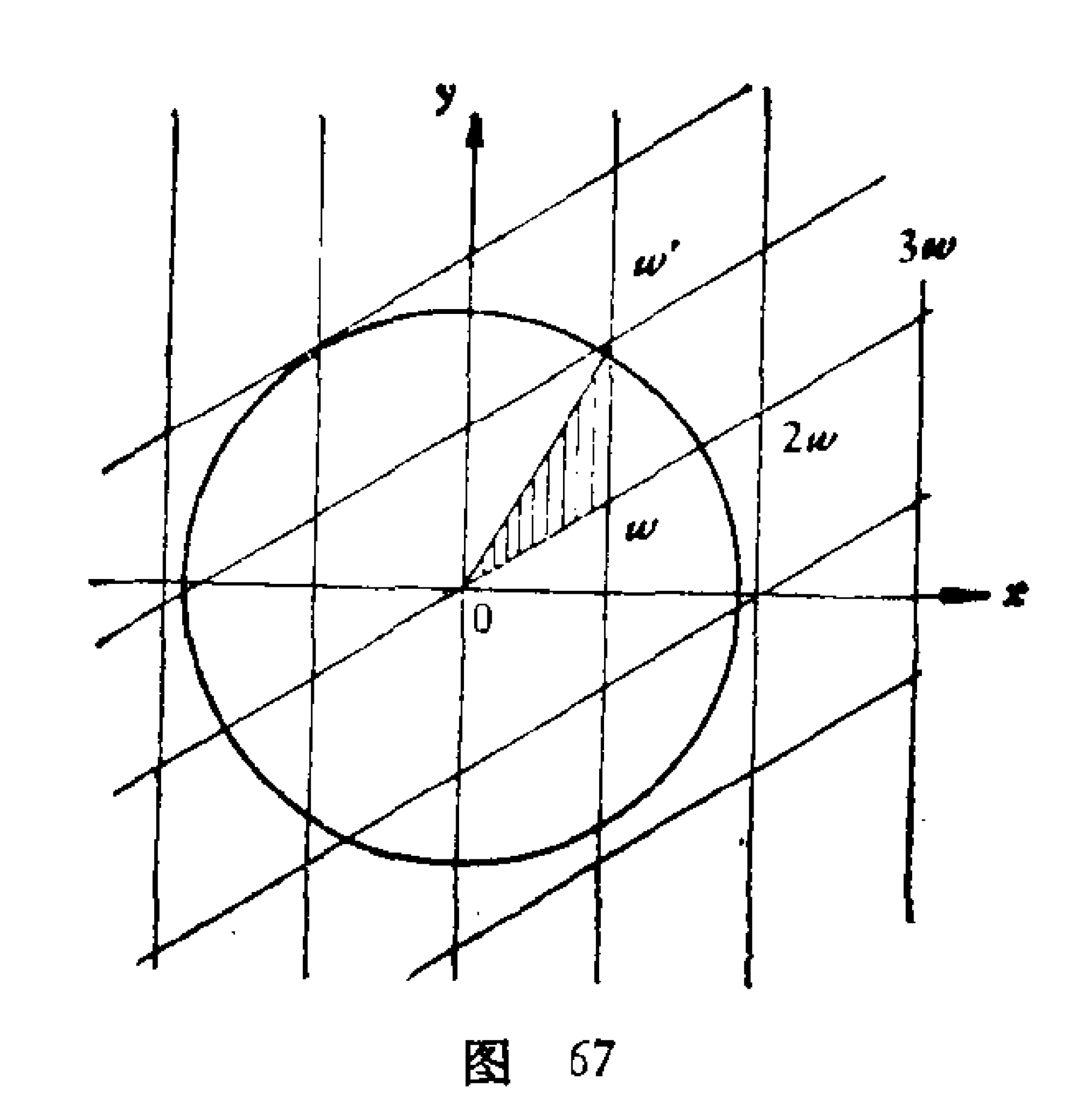


图 67

$$nw+mw'$$

之外,M 无其它的点.

假定不然,而有一 r 可以表成为

$$r=(n+\vartheta)w+(m+\vartheta)'w',$$

$$0<\vartheta<1,\ 0<\vartheta'<1$$

的形式,因此

$$r_1=\vartheta w+\vartheta' w'$$

也属于 M. r_1 位于以 $0, w, w', w+w'$ 为顶点的平行四边形内,而且不与任何顶点重合. 由作图法它不能在有阴影的三角形内,因此,它在另一部分之中. 但此是

$$w+w'-r_1=(1-\vartheta)w+(1-\vartheta')w'$$

也属于 M,而它却在阴影的三角形中了. 这与作图原意违背. 因此得出本定理.

习题. n 维矢量所成的模的秩数 $\leqslant n$.

§2. 周期函数

三角函数 $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\cdots$ 等的一个最重要的性质是周期性，即命 $f(z)$ 是其中的一个,则

$$f(z+2\pi)=f(z).$$

由此当然得出对任一整数 n 常有

$$f(z+2n\pi)=f(z).$$

这样的函数称为周期函数以 2π 为周期. 但为了区别起见,这称为单周期函数,而本章所要讨论的是双周期函数.

命 w_1, w_2 是任意二复数,其比非实数,适合于

$$f(z+2w_1)=f(z),\ f(z+2w_2)=f(z)$$

的函数称为双周期函数. 以 $2w_1, 2w_2$ 为周期,双周期的亚纯函数称为椭圆函数.

如果亚纯函数的周期有一聚点,则它一定是常数. 因为如果有聚点 z_0，则在 z_0 附近有无穷点 z_k 都使 $f(z_k)=f(z_0)$, $k=1,2,\cdots$, 由 Vitali 定理,可知其为常数.

与上节的结果合并言之，我们仅能讨论有一个周期、两个周期(其比是复数)的亚纯函数，而讨论比是实数的双周期函数及两个以上周期的函数是无意义的.

§3. 周期整函数的展开式

假定 $f(z)$ 是以 w 为周期的整函数，即适合于 $f(z+w)=f(z)$ 的整函数. 命 $z=wW/2\pi$ 及

$$f(z)=\varphi(W),$$

则

$$\varphi(W+2\pi)=f(z+w)=f(z)=\varphi(W).$$

即 $\varphi(W)$ 是 2π 为周期的函数. 要讨论 $\varphi(W)$ 在全平面上的性质，只要研究 $\varphi(W)$ 在长条 $0\leqslant x<2\pi$ 中的性质即足. 全平面可以分为无穷个长条

$$2\pi m\leqslant x<2\pi(m+1),\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,$$

而每一长条中的性质都是一样的.

把 $\varphi(z)$ 展开为 Fourcer 级数得

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(y)e^{inx},$$

这儿

$$C_n(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)e^{-inx}dx.$$

由于 $\varphi(z)$ 适合于 Laplace 方程，所以

$$\begin{aligned}C_n''(y)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(z)e^{-inx}dx\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(z)e^{-inx}dx\\&=\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)e^{-inx}dx=n^2C_n(y)\end{aligned}$$

(用两次部分积分及 $\varphi(z)$ 的周期性).

这微分方程的解答是 $a_ne^{-ny}+b_ne^{ny}$，因此得出

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in(z)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{in(\bar z)}.$$

这是有周期的调和函数的一般形式，作为解析函数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar z}=0$，因此得出展式

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{inz},$$

因此得出

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{\frac{2\pi in}{w}z}.$$

本节所涉及到的收敛性都是十分容易处理的，因此得

定理 1. 周期整函数 $f(z)$ 可以表为对所有 z 都收敛的 Fourier 级数.

对一般的 $f(z)$ 讲，过 0 与 w 作二平行线，这二平行线间的区间称为 $f(z)$ 的周期带. 显然平面可以周期带经每次前移或后移 w 而得出的带子盖满，由 Liouville 定理显然推得

定理 2. 如果一个周期整函数在周期带中有则，则这函数是一常数.

定理 3. 如果在当 z 趋于周期带的两端时，$f(z)$ 是有限阶无穷大，则它一定是三角多项式.

更普遍地有以下的

定理 4. 命 $f(z)$ 是一个亚纯周期函数. 如果当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 的无穷大阶是有限的，则它是两个三角多项式的比值.

§4. 基　　域

考虑由变形

$$z' = z + mw + m'w', \quad m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1}$$

所成的群. 如果有变形 (1) 把 z_0 变为 z，这两点称为相合.

如果 w/w' 非实数，这群有一特点，一点 z_0 与其相合点所成的集合是没有聚点的(除 $\pm\infty$ 外).

这个群的演出元素是

$$z = z + w, \quad z = z + w'.$$

我们不妨假定 $\vartheta(w/w') > 0$. 对任一 m 作直线

$$z = mw + tw', \quad -\infty < t < \infty.$$

对任一 m' 作直线

$$z = m'w' + tw, \quad -\infty < t < \infty.$$

这些直线把平面分为无数个平行四边形，这些平行四边形是相合的，即给了任意两个四边形，我们有一个变形 (1)，把其一变为另一.

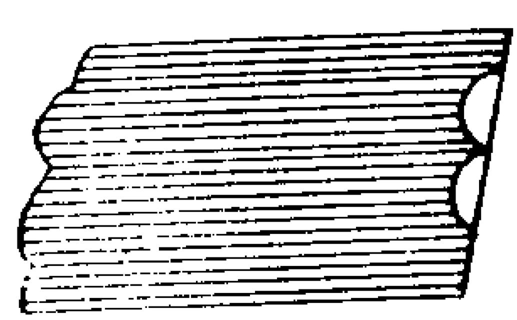


图 68

定义. 在平面上的一个域称为一个基域，如果它适合以下的条件：(i) 任何一点一定相合于这基域中的一点；(ii) 基域中任何一点都不相合.

例 1. 由 $o, w, w', w+w'$ 四点所成的平行四边形成一基域，但必须严格说明四边中只算两边 ow, ow'，四角点顶点只算一顶点 o.

例 2. 由图 68 的图形中一边附近挖去一块，补到对边上去也成一基域.

§5. 椭圆函数的一般性质

假定 $f(z)$ 是任一椭圆函数，即双周期的亚纯函数，具有周期 $2w$ 与 $2w'$，假定比值 w/w' 非实数，并且不妨假定 $\vartheta(w/w') > 0$. 因此由四点 $0, 2w, 2w', 2(w+w')$所形成的平行四边形非蜕化的，称为基域. 形如 $2(mw+m'w')$ (m, m' 是整数) 的点把平面分成为一些与基域全等的平行四边形. 每一平行四边形中 $f(z)$ 的性质，都同基域的性质是一致的.

定理 1. 如果双周期函数是整函数，则它一定是常数.

证明是十分简单的，在基域 $f(z)$ 有界，因此在全平面有界，故由 Liouville 定理立刻推出这一结论.

因此，在基域中或边界上 $f(z)$ 至少有一极点，在边界上的极点数的计算法是两个算一个，因为如果 z 是极点，则 $z\pm w$, $z\pm w'$ 也是极点. 如果 z 在边上，则 $z\pm w$, $z\pm w'$ 四点之一 z_0 也在边上. 如果绕 z 作半圆弧在区外，则所对应的绕 z_0 的半圆弧在区内. 在这样修改后的基域内，z 与 z_0 中只留下一点，同样角上如有极点，则四角全有，但只以一角入算. 基域中只能有有限个极点，把重数算进去，并且依以上的理解入算，则极点数称为椭圆函数的阶.

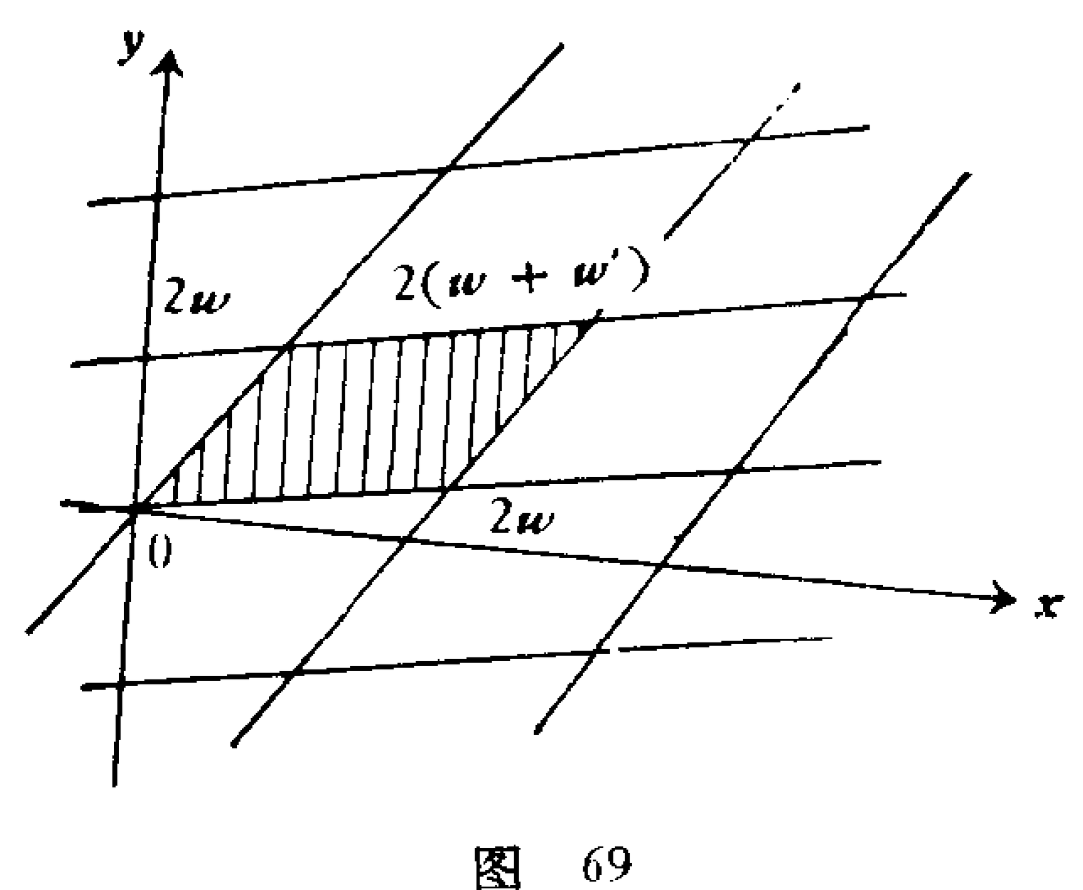
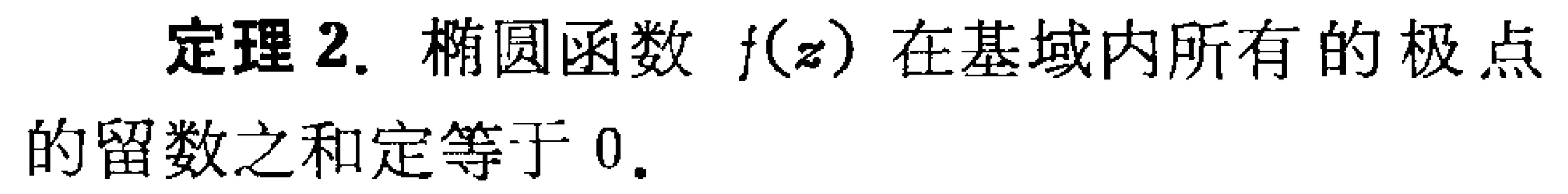


图 69



定理 2. 椭圆函数 $f(z)$ 在基域内所有的极点的留数之和定等于 0.

证. 只需证明沿基域的周界 C' 的积分等于 0 即足（但注意如果边(角)上有极点，需用以上所说的办法，避开之）.

$$\int_C f(z)\,dt = \int_0^{2w} + \int_{2w}^{2(w+w')} + \int_{2(w+w')}^{2w'} + \int_{2w'}^{0} f(z)\,dz$$
$$= \int_0^{2w} f(z)\,dt + \int_0^{2w'} f(z+2w)\,dt + \int_{2w}^{0} f(z+2w')\,dz$$
$$+ \int_{2w'}^{0} f(z)\,dz = 0.$$

由此立刻推得

定理 3. 设有一阶的椭圆函数存在.

定理 4. 椭圆函数在基域内取一复数值 a 的次数等于阶数，因此零点数等于阶数.

证. 在基域中 $f(z)=a$ 的解数与极点数之差等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz.$$

被积函数是椭圆函数，因此，此数是 θ，即得所证.

定理 5. 在一基域内，$f(z)=a$ 的解是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，而 $f(z)=\infty$ 的解是 $p_1, \cdots, p_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i$$

相合.

证. 已知

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\,\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{2w} + \int_{2w}^{2(w+w')} + \int_{2(w+w')}^{2w'} + \int_{2w'}^{0}\right) z\,\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{2w} z\,\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz + \int_0^{2w'} (z+2w)\,\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz\right.$$

$$+\int_{2w}^{0}(z+2w')\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz+\int_{2w'}^{0}z\frac{f'(z)}{f'(z)-a}dz\Big)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(-2w'\int_0^{2w}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz+2w\int_0^{2w'}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz\right).$$

积分

$$\int_0^{2w}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

等于 $\log(f(z)-a)$ 从 0 到 $2w$ 的变化，由于 $f(2w)-a=f(0)-a$，所以这变化等于 $2m\pi i$，而 m 是整数，故得出所证.

§6. 代数相关性

以 $2w, 2w'$ 为周期的椭圆函数的集合 K 经加、减、乘、除（分母 $\neq 0$）而自封，这 K 称为一个代数函数域.

定理 1. 代数函数域 K 中任二函数 $f(z)$，$g(z)$ 都是代数相关的，也就是存在一个常系数的多项式 $P(Z、W)$ 使

$$P(f(z),\ g(z))=0.$$

证. 命 $a_1, \cdots, a_m$ 是基域内 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的极点的集合. $f(z)$ 在 $a_1, \cdots, a_m$ 的阶数各为 $p_1, \cdots, p_m$；$g(z)$ 的阶数各为 $q_1, \cdots, q_m$，命

$$\sum_{i=1}^{n}\max(p_i,\ q_i)=P.$$

假定 $Q(Z, W)$ 是 Z 与 W 的某一 n 次多项式(系数待定). 将 $Z=f(z)$，$W=g(z)$ 代入这多项式，则它也是 K 中的函数. 如果能证明：我们能选取 Q 的系数使 $Q(f, g)=F(z)$ 是一常数 C，则定理就证明了. 因为取 $P=Q-C$ 即得，也就是如果选得 Q 使 $Q(f, g)=F(z)$ 在 $z=a_i$ 处的主要部分都等于 0，那也就够了.

对 $F(z)$ 来说，极点 a_k 的阶数 $\leqslant n\max(p_k, q_k)$. 因此，使 $F(z)$ 在 $z=a_k$ 的主要部分为零的条件数 $\leqslant n\max(p_k, q_k)$. 使 $F(z)$ 在所有的 $z=a_k$ 的主要部分为零的条件数

$$\leqslant n\sum_{k=1}^{m}\max(p_k,\ q_k)=nP.$$

这些条件对多项式 Q 的系数来说都是线性齐次的，而多项式 Q 总共有 $\frac{1}{2}(n+3)n$ 个待定系数(我们不计常数项). 因此，选取 $n+3>2P$，则待定系数的个数多于方程的个数. 这方程组至少有一组异于 0 的解，因而所定出的 Q 就适合我们的要求.

由于 $f(z)$ 的微商与 $f'(z)$ 有相同的周期，因而推出

定理 2. 任一椭圆函数，都满足于如下形式的代数微分方程

$$P(f(z),\ f'(z))=0,$$

这儿 $P(Z, W)$ 是多项式.

附记. 命 $f(z)$ 是一奇椭圆函数，则 $f(w)=-f(-w)=-f(-w+2w)=-f(w)$，所以 $f(w)=0$. 即一个奇椭圆函数在半周处有一个 0 点或极点，这 0 点或极点的阶一定

是奇数，如果不然，$f(z)$ 有 $-2n$ 阶的零点，则 $f^{(2n)}(z)$ 是一个 $z=w$，不是 0 点的奇函数这是不可能的．同样，如果 $f(z)$ 有 $-2n$ 阶的极点，则考虑 $\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(2n)}$ 可得同样的结论．

§7. 椭圆函数的两种理论

前面已经讲过没有一阶的椭圆函数存在，因而我们从两阶的椭圆函数入手，希望从这些基本函数构造出所有的椭圆函数来．两阶的椭圆函数显然有两点：(i) 有一个重极点的椭圆函数；(ii) 有两个单极点的椭圆函数；这就是 Weierstrass 理论与 Jocobi 理论各个不同的出发点．

更切实些说：Weierstrass 从构造出在基域内仅有一二重极点的椭圆函数出发，然后发展成为一般理论．而 Jacobi 的理论则从两个单极点的情况出发．前者在理论上显得更方便些，但在实际问题中 Jacobi 函数更常遇到．

§8. Weierstrass ζ 函数

我们把原点放在基本平行四边形的中心，我们研究那种以 $z=0$ 为二重极点的椭圆函数．由于周期性，所以 $z=2mw+2m'w'$ 也都是极点，因此建议我们考虑函数

$$\sum_{m,m'=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}.$$

如果这级数收敛，则它就是适合我们所需要的函数了，因而我们不得不迂迴一下．

图 70

引理． 如果 $\vartheta(w/w')>0$，则级数

$$\sum_{m,m'=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(mw+m'w')^3}$$

是绝对收敛的，这儿 Σ' 表示由 Σ 中除去 $m=m'=0$ 的一项．

证．把 $mw+m'w$ 画在平面上，定义 π_n 是以 $n(w+w')$，$n(w-w)$，$n(-w+w)$，$n(-w-w')$ 为顶点的平行四边形的边框，在 π_n 上共有 $8n$ 点．命 l 等于 π_1 上的点与 0 的最短距离，则 π_n 上的点与 0 的距离是 nl，因此

$$\sum_{\pi_n}\frac{1}{(mw+m'w')^3}\leqslant\frac{8n}{(nl)^3},$$

由于 $\frac{8}{l^3}\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以引理得证．

由引理推得，级数

$$f(z)=\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^3} \tag{1}$$

是绝对收敛的（但 z 不等于 $2mw+2m'w$ 之一）．在任何一个圆 R 内除有在此圆内有极点的诸项外，这级数是一致收敛的．因而可以证明 (1) 代表一亚纯函数，而且以 $2w$, $2w'$ 为周期．这显然是一奇函数．

求 $f(z)$ 的积分，我们可以构造出偶的二阶椭圆函数.

取一条不碰上极点的由 z_0 到 z 的曲线，求积分得

$$\varphi(z)=C+\int_{z_0}^{z} f(z)dz=C-\frac{1}{2}\Sigma\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(z_0-2mw-2m'w')^2}\right].$$

把 $m=m'=0$ 的项提出

$$\varphi(z)+\frac{1}{2z^2}=C+\frac{1}{2z_0^2}-\frac{1}{2}\Sigma'\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(z_0-2mw-2m'w')^2}\right].$$

右端的函数在 $z=0$ 处有则，所以可选 C 使其在 $z=0$ 处的值 $=o$，即

$$o=C+\frac{1}{2z_0^2}-\frac{1}{2}\Sigma'\left[\frac{1}{(2mw+2m'w')^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(z_0-2mw-2m'w')^2}\right].$$

因此

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2}-\Sigma'\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{(2mw+2m'w')^2}\right]\right\}.$$

花括弧内是 Weierstrass 函数，记之为 $\gamma(z)$，即

$$\gamma(z)=\frac{1}{z^2}+\Sigma'\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(2mw+2m'w')^2}\right]. \tag{2}$$

这级数绝对收敛，因当 T 充分大时

$$\left|\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}\right|=\left|\frac{(2T-z)z}{T^2(z-T)^2}\right|=o\left(\frac{1}{|T|^3}\right).$$

因此由引理可知级数 (2) 收敛.

并且容易证明 $\gamma(z)$ 是偶函数，即

$$\gamma(-z)=\gamma(z).$$

而

$$\gamma'(z)=-\frac{2}{z^3}-2\Sigma'\frac{2}{(z-2mw-2m'w')^3}$$
$$=-2\Sigma\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^3}=-2f(z).$$

由此可见 $\gamma'(z)$ 是一椭圆函数，其周期是 $2w$, $2w'$，即

$$\gamma'(z+2w)-\gamma'(z)=0,$$
$$\gamma'(z+2w')-\gamma'(z)=0.$$

积分后得出

$$\gamma(z+2w)-\gamma(z)=C,$$
$$\gamma(z+2w')-\gamma(z)=C'.$$
以 $z=-w$ 及 $z=-w'$ 分别代入上式,并由于 $\gamma(z)$ 是偶函数,因此 $C=C'=0$. 由此 $\gamma(z)$ 是椭圆函数，并且在平行四边形中有一二阶极点，在 $2mw+2m'w'$ 处的主要部分是 $\dfrac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}$.

易知 $\gamma'(z)$ 是三阶的奇椭圆函数,由上节的附记可知在半周期处 $w, w', w+w'$ 为零点,因此这些点都是 $\gamma(z)$ 的二重点. 即
$$\gamma(w)=e_1,\ \gamma(\omega+w')=e_2,$$
$$\gamma(w')=e_3.$$
即 $\gamma(z)=e_1, e_2, e_3$ 时有重根. 如果 $e\neq e_1, e_2, e_3$, 则 $\gamma(z)=e$ 决无重根，其理由是如有,则 $\gamma'(z)=0$ 又多了一根,这是不可能的.

$\gamma(z)$ 的 n 次微商是
$$\gamma^{(n)}(z)=(-1)^n\frac{(n+1)!}{z^{n+2}}+(-1)^n(n+1)!\Sigma'\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^{n+2}}.$$

§9. $\gamma(z)$ 与 $\gamma'(z)$ 的代数关系

先求 $\gamma(z)$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 展开式,由于
$$\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}=\frac{1}{T^2}\left[\left(1-\frac{z}{T}\right)^{-2}-1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{T^{n+2}}z^n,$$
而 $\gamma(z)$ 是偶函数,由 §8(2) 可知
$$\gamma(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2}{20}z^2+\frac{g_3}{28}z^4+\cdots. \tag{1}$$
这儿用通常的符号
$$g_2=60\Sigma'\frac{1}{(2mw+2m'w')^4},\quad g_3=140\Sigma'\frac{1}{(2mw+2m'w')^6}. \tag{2}$$
微分 (1) 式得
$$\gamma'(z)=-\frac{2}{z^3}+\frac{g_2}{10}z+\frac{g_3}{7}z^3+\cdots. \tag{3}$$
由 (1), (3) 可知
$$\gamma'^2(z)=\frac{4}{z^6}\left(1-\frac{g_2}{10}z^4-\frac{g_3}{7}z^6+\cdots\right),$$
$$\gamma^3(z)=\frac{1}{z^6}\left\{1+\frac{3g_2}{20}z^4+\frac{3g_3}{28}z^6+\cdots\right\},$$
因此
$$(\gamma'(z))^2-4(\gamma(z))^3+g_2\gamma(z)=-g_3+C_2z^2+C_3z^4+\cdots. \tag{4}$$
右边是一处处有则的双周期函数,所以是常数,即 $\gamma(z)$ 与 $\gamma'(z)$ 之间有代数关系
$$(\gamma'(z))^2=4\gamma^3(z)-g_2\gamma(z)-g_3. \tag{5}$$

$\gamma'(z)$ 的三个零点已经知道是 $z=w, w', w+w'$, 因此得出

$$(\gamma'(z))^2 = 4(\gamma(z) - e_1)(\gamma(z) - e_2)(\gamma(z) - e_3). \tag{6}$$

这儿 $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}$, $e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}$, 判别式 $\frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$ 必须非 0.

命 $\gamma(z) = W$, 则得微分方程

$$\frac{dz}{dW} = \frac{1}{\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}}, \tag{7}$$

因此推出

$$z - z_0 = \int_{W_0}^{W} \frac{dW}{\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}}. \quad (W_0 = \gamma(z_0))$$

命 $z_0 \to 0$, 则 $W_0 \to \infty$, 因此得出

$$z = \int_{\infty}^{W} \frac{dW}{\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}}$$

的反函数是 $\gamma(z)$.

微分 (5) 式得出

$$2\gamma''(z) = 12\gamma^2(z) - g_2. \tag{8}$$

§ 10. 函 数 $\zeta(z)$

Weierstrass 再引进函数

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\gamma(z) - \frac{1}{z^2}\right) dz, \quad (\zeta'(z) = -\gamma(z)) \tag{1}$$

由 $\gamma(z)$ 的表达式可知

$$\int_0^z \left(\gamma(z) - \frac{1}{z^2}\right) dz = -\Sigma' \left[\frac{1}{z - 2mw - 2m'w'} + \frac{1}{2mw + 2m'w'} + \frac{z}{(2mw + 2m'w')^2}\right]. \tag{2}$$

这级数代表一个亚纯函数,以 $2mw + 2m'w'$ 为其单极的函数. 由于

$$(\zeta(z) + \zeta(-z))' = \zeta'(z) - \zeta'(-z) = \gamma(-z) - \gamma(z) = 0,$$

可知 $\zeta(z) + \zeta(-z) = C$, 当 $z \to 0$ 时, 由 (1) 可得 $C = 0$, 因此 $\zeta(z) = -\zeta(-z)$ 是一奇函数.

$\zeta(z)$ 仅有一单极点,所以不可能是椭圆函数. 现在研究当 $\zeta(z + 2w)$, $\zeta(z + 2w')$ 改变时的情况.

$$(\zeta(z + 2w) - \zeta(z))' = -\gamma(z + 2w) + \gamma(z) = 0,$$

因此

$$\zeta(z + 2w) - \zeta(z) = 2\eta. \tag{3}$$

同样

$$\zeta(z + 2w') - \zeta(z) = 2\eta'. \tag{4}$$

数值 w, w', η, η' 间有简单的关系式存在. 我们为着顶点是 $\pm w \pm w'$ 的平行四边形求 $\zeta(z)$ 的积分. 在这平行四边形中, $\zeta(z)$ 有一留数为 1 的极点 $z = 0$, 故这积分等于

$2\pi i$. 即

$$2\pi i=\left(\int_{w-w'}^{w+w'}+\int_{w+w'}^{-w+w'}+\int_{-w+w'}^{-w-w'}+\int_{-w-w'}^{w-w'}\right)\zeta(z)dz$$

$$=\int_{-w-w'}^{-w+w'}\zeta(z+2w)dz+\int_{w-w'}^{-w-w'}\zeta(z+2w')dz$$

$$+\int_{-w+w'}^{-w-w'}\zeta(z)dz+\int_{-w-w'}^{w-w'}\zeta(z)dz$$

$$=\int_{-w-w'}^{-w+w'}(\zeta(z+2w)-\zeta(z))dz+\int_{w-w'}^{-w-w'}(\zeta(z+2w')-\zeta(z))dz$$

$$=4\eta w'-4\eta' w.$$

即得 Legendre 关系式

$$\eta w'-\eta' w=\frac{1}{2}\pi i. \tag{5}$$

§11. $\sigma(z)$ 函 数

Weierstrass 的 $\sigma(z)$ 函数由下法引入

$$\sigma(z)=z\exp\left(\int_0^z\left(\zeta(z)-\frac{1}{z}\right)dz\right), \tag{1}$$

即

$$(\log\sigma(z))'=\zeta(z). \tag{2}$$

将 $\zeta(z)$ 的展式 §10(2) 表之

$$\zeta(z)-\frac{1}{z}=\Sigma'\left(\frac{1}{z-T}+\frac{1}{T}+\frac{z}{T^2}\right),$$

以 T 表 $2mw+2m'w'$ 逐项求积，而且取指数后，得出 $\sigma(z)$ 的无穷乘积表示式

$$\sigma(z)=z\exp\left(\Sigma'\left(\log\left(1-\frac{z}{T}\right)+\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}\right)\right)$$

$$=z\pi'\left(1-\frac{z}{T}\right)e^{\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}}, \tag{3}$$

这显示出 $\sigma(z)$ 是有零点 $z=T$ 的整函数.

由

$$\sigma(-z)=-z\exp\left(\int_0^{-z}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du\right)$$

$$=-z\exp\left(-\int_0^z\left(\zeta(-v)+\frac{1}{v}\right)dv\right)$$

$$=-z\exp\left(\int_0^z\left(\zeta(v)-\frac{1}{v}\right)dv\right)=-\sigma(z),$$

可知 $\sigma(z)$ 是奇函数.

从 (2) 可知

$$\frac{\sigma'(z+2w)}{\sigma(z+2w)}\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=2n,$$

求积分且取指数后得出

$$\sigma(z+2w)=\sigma(z)e^{2\eta z+\gamma},$$

以 $z=-w$ 代入此式,则得 $-1=e^{-2\eta w+\gamma}$, 即得

$$\sigma(z+2w)=-\sigma(z)e^{2\eta(z+w)}.$$

同样得出

$$\sigma(z+2w')=-\sigma(z)e^{2\eta'(z+w')}.$$

除 $\sigma(z)$ 外,我们还有三个 σ 函数

$$\sigma_1(z)=-\frac{e^{2\eta z}}{\sigma(w)}\sigma(z-w),$$

$$\sigma_2(z)=-\frac{e^{2\eta' z}}{\sigma(w')}\sigma(z-w'),$$

$$\sigma_3(z)=-\frac{e^{2\eta'' z}}{\sigma(w'')}\sigma(z-w''),$$

这儿 $w''=w+w'$, 而 η'' 是 $\zeta(z+2w'')-\zeta(z)=2\eta''$. 取负号为的是使 $\sigma_k(0)=1$, 编号也是通用的习惯.

§ 12. 椭圆函数的一般表达式

一般的椭圆函数可以有下列三种的表达方式: (i) 由 $\sigma(z)$ 表出(因子分解法), (ii) 由 $\zeta(z)$ 表出(分项分数法), (iii) 由 $\gamma(z)$ 及 $\gamma'(z)$ 表出.

(i) 假定 $f(z)$ 在基域内有零点 $a_1,\cdots,a_n$ 及极点 $b_1\cdots,b_n$ (重根重算,边界上的算法见前),我们早已(在 § 5) 证过

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=2\Omega,$$

2Ω 是一周期.

作函数

$$\varphi(z)=\frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_{n-1})\sigma(z-b_n-2\Omega)},$$

此函数与 $f(z)$ 有同样的零点与极点,并且

$$\varphi(z+2w)=e^{2\eta(b_1+\cdots+b_n-a_1\cdots a_n+2\Omega)}\varphi(z)=\varphi(z),$$

故 $f(z)/\varphi(z)$ 是一无极点的椭圆函数,因此

$$f(z)=C\varphi(z).$$

(ii) 假定 $f(z)$ 在极点 $z=b_k(k=1,2,\cdots m)$ 有主要部分

$$g_k(z)=\frac{C_{k1}}{z-b_k}+\frac{C_{k2}}{(z-b_k)^2}+\cdots+\frac{C_{kn_k}}{(z-b_k)^{n_k}},$$

则差额

$$f(z)-\sum_{k=1}^{m}\Big\{C_{k1}\zeta(z-b_k)-C_{k2}\zeta'(z-b_k)+\cdots$$
$$+(-1)^{n_k-1}\frac{C_{kn_k}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z-b_k)\Big\}$$

是一个全平面上解析的函数. 由于这是椭圆函数,当 z 变为 $z+2w$ 时,这函数增加

$$-2\eta\sum_{k=1}^{m}C_{k1},$$

因此,一定要有 $\sum_{k=1}^{m}C_{k1}=0$. 上式表椭圆函数,该差额应当是常数,因此得 Hermite 表达式

$$f(z)=C+\sum_{k=1}^{m}\Big\{C_{k1}\zeta(z-b_k)-C_{k2}\zeta'(z-b_k)+\cdots$$
$$+(-1)^{n_k-1}\frac{C_{kn_k}}{(n_k-1)}\zeta^{(n_k-1)}(z-b_k)\Big\}.$$

(iii) 先证恒等式

$$\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v)=\frac{1}{2}\frac{\gamma'(u)-\gamma'(v)}{\gamma(u)\gamma(v)}. \tag{1}$$

把

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}$$

作为 u 的函数,它与 $\gamma(u)-\gamma(v)$ 有相同的零点与极点,因此

$$\gamma(u)-\gamma(v)=C\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}.$$

乘以 $\sigma^2(u)$ 并命 $u\to 0$, 则得出 $1=-C\sigma^2(v)$, 因此得出

$$\gamma(u)-\gamma(v)=-\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}. \tag{2}$$

对 u, v 各求对数微商,得

$$\frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-\gamma(v)}=\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u),$$
$$\frac{-\gamma'(v)}{\gamma(u)-\gamma(v)}=\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v),$$

由此立刻推出 (1) 式.

在 (1) 中取 $u=z-a$, $v=a-b$, 则得

$$\zeta(z-b)-\zeta(z-a)=\zeta(a-b)+\frac{1}{2}\frac{\gamma'(z-a)-\gamma'(a-b)}{\gamma(z-a)\gamma(a-b)}.$$

因此,如果 $\sum_{k=1}^{m}C_{k1}=0$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}C_{k1}\zeta(z-b_k)$$

可以表成为 γ 与 γ' 的函数, ζ', ζ'', $\cdots$, 当然可以表成为 γ, γ' 的函数. 因此任何一个椭圆函数一定可以表为 γ, γ' 的函数.

(iv) 先假定 $f(z)$ 是偶函数.

我们已经知道如果 $a\not\equiv w$, w', $w+w''$, 则

$$\gamma(z)-\gamma(a)=0$$

有两个根 $z=\pm a$，而都不是重根．而

$$\gamma(z)-\gamma(w)=0$$

则有重根 $z=w$．如果 $f(z)$ 是偶函数,则 $z=w$ 一定是偶重的零点(或极点),不然，$f'(z)$ 是奇函数就有偶重根了,这是不可能的(§6附记).

把 $f(z)$ 在 $\pm w\pm w'$ 为顶点的平行四边形内的零点排好:

$$\pm a_1,\ \pm a_2,\ \cdots,\ \pm a_k$$

依重数排列,但如果是 $w,\ w',\ w+w'$，则依重数之半排列．作函数

$$(\gamma(z)-\gamma(a_1))(\gamma(z)-\gamma(a_2))\cdots(\gamma(z)-\gamma(a_n)),$$

它是与 $f(z)$ 有相同的零点的函数,同样作出

$$\frac{1}{(\gamma(z)-\gamma(b_1))\cdots(\gamma(z)-\gamma(b_n))}$$

是与 $f(z)$ 有相同的极点的函数表达式,而

$$\varphi(z)=\frac{(\gamma(z)-\gamma(a_1))(\gamma(z)-\gamma(a_2))\cdots(\gamma(z)-\gamma(a_n))}{(\gamma(z)-\gamma(b_1))(\gamma(z)-\gamma(b_2))\cdots(\gamma(z)-\gamma(b_n))}$$

与 $f(z)$ 有相同的零点与极点,而并未添出新的零点与极点．因此

$$f(z)=C\varphi(z).$$

命 $f(z)$ 是任意函数,则可分为奇偶部分

$$F(z)=\frac{F(z)+F(-z)}{2}+\frac{F(z)-F(-z)}{2},$$

因此显然可以表成为

$$F(z)=R(\gamma(z))+\gamma'(z)R_1(\gamma(z)),$$

这些$R(Z)$，$R_1(Z)$ 是Z的有理函数.

§13. 加 法 公 式

1）考虑函数

$$\gamma'(z)-A\gamma(z)-B.$$

它是一个在 $z=0$ 有三重极点的函数，因此它有三个根．这三个根之和是一个周期(§5定理5),即如果 u,v 是它的根,则 $-u-v$ 也是它的根,即得

$$\begin{aligned}&\gamma'(u)-A\gamma(u)-B=0,\\&\gamma'(v)-A\gamma(v)-B=0,\\&\gamma'(-u-v)-A\gamma(u+v)-B=0.\end{aligned}\tag{1}$$

消去 A,B 得

$$\begin{vmatrix}\gamma(u), & \gamma'(u), & 1\\ \gamma(v), & \gamma'(v), & 1\\ \gamma(u+v), & -\gamma'(u+v), & 1\end{vmatrix}=0\tag{2}$$

2）$\gamma'(z)^2-\{A\gamma(z)+B\}^2$ 也当 $z=u,\ v,\ -u-v$ 时为零．这函数等于

$$4\gamma^3(z)-A^2\gamma^2(z)-(2AB+g_2)\gamma(z)-(B^2+g_3).$$

这里 $\gamma(z)$ 的三次方程对一般的 $u,\ v,\ \gamma(u),\ \gamma(v),\ \gamma(u+v)$ 是不等的，它们是三次

方程

$$4Z^3 - A^2Z^2 - (2AB + g_2)Z - (B^2 + g_3) = 0$$

的三个根，因此

$$\gamma(u) + \gamma(v) + \gamma(u+v) = \frac{1}{4}A^2.$$

而由 (1)

$$A = \frac{\gamma'(u) - \gamma'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)},$$

因此得出

$$\gamma(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'(u) - \gamma'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)}\right)^2 - \gamma(u) - \gamma(v). \tag{3}$$

命 $u \to v$，则得

$$\begin{aligned}\gamma(2u) &= \frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\gamma'(u) - \gamma'(u-h)}{\gamma(u) - \gamma(u-h)}\right)^2 - 2\gamma(u) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\gamma''(u)}{\gamma'(u)} - 2\gamma(u).\end{aligned} \tag{4}$$

§ 14. 椭圆函数的积分

1) 由 Hermite 公式我们可以立刻推出以下的积分公式

$$\int f(z)dz = Cz + \sum_{k=1}^{m}\Big\{C_{k1}\log[\sigma(z-b_k)] - C_{k2}\zeta(z-b_k) + \cdots (-1)^{n_k-1}\frac{C_{kn_k}}{(n_k-1)'}\zeta^{(n_k-2)}(z-b_k)\Big\}.$$

因此可见一个椭圆函数的积分可以表为 σ, ζ, γ 的函数，但 σ 在 log 之下出现.

为了使椭圆函数的积分仍然是椭圆函数，必须使这积分无对数歧点，即留数 C_{k1} 都是 0，还要有

$$2C\omega - 2\eta\sum_k C_{k2} = 0, \quad 2C\omega' - 2\eta'\sum_k C_{k2} = 0,$$

由此解得 $C = 0$, $\Sigma C_{k2} = 0$.

反之，如果这些条件适合，则 $f(z)$ 的积分是椭圆函数.

2) 在初等微积分上我们会求

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})dx$$

的积分. 这儿 $R(u, v)$ 是 u, v 的有理函数，但是略进一步，积分

$$\int R(x, \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3})dx$$

就不是初等函数所能表出的了. 但是如果我们命 $x = \gamma(z)$，则这一积分就变为

$$\gamma(z), \quad \gamma'(z)$$

的有理函数了.

我们知道 $\gamma(z), \gamma'(z)$ 的有理函数可以表成为

$$R(\gamma(z)) + R_1(\gamma(z))\gamma'(z).$$

这儿 $R(Z)R_1(Z)$ 是 Z 的有理函数. $R_1(\gamma(z))\gamma'(z)$ 的积分是易于求出的，因此现在留待解决的是

$$\int R(\gamma(z))dz.$$

先研究

$$I_n = \int (\gamma(z))^n dz,$$

由关系式

$$\frac{d}{dz}(\gamma(z)^{n-1}\gamma'(z)) = (n-1)\gamma(z)^{n-2}\gamma'^2(z) + \gamma(z)^{n-1}\gamma''(z),$$

此处 $\gamma'^2(z)$ 与 $\gamma''(z)$ 各以 $4\gamma^3(z) - g_2\gamma(z) - g_3$, $6\gamma^2(z) - \frac{1}{2}g_2$ 代之,则得

$$\frac{d}{dz}(\gamma(z)^{n-1}\gamma'(z)) = (4n+2)\gamma(z)^{n+1}$$
$$-\left(n-\frac{1}{2}\right)g_2(\gamma(w))^{n-1} - (n-1)g_3(\gamma(u))^{n-2}.$$

积分之得

$$\gamma(z)^{n-1}\gamma'(z) = (4n+2)I_{n+1} - \left(n-\frac{1}{2}\right)g_2 I_{n-1} - (n-1)g_3 I_{n-2}.$$

如果知道 I_0, I_1, 则由此递归公式 $n = 1, 2, \cdots$ 可以算出所有的 I_n 来. 但已知

$$I_0 = \int dt = z, \quad I_1 = \int \gamma(z)dz = -\zeta(z),$$

所以 I_n 都能以 $\gamma(z)$, $\gamma'(z)$, $\zeta(z)$ 表出.

如果 $R(z)$ 是真分数 $\frac{Q(z)}{P(z)}$, 用分项分数法. 但我们这儿仅说明怎样求

$$\int \frac{du}{\gamma(u) - \gamma(v)}.$$

这儿 v 不等于 w, w', w'', 或 $\gamma(v) \neq e_1, e_2, e_3$.

在 § 12 中已证得

$$\frac{-\gamma'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v),$$

因此

$$\int \frac{du}{\gamma(u) - \gamma(v)} = \frac{-1}{\gamma'(v)}(\log\sigma(u+v) - \log\sigma(u-v) - 2u\zeta(v)) + C.$$

§ 15. 代数函数域

上节的 (iii) 解决了一个重要问题:

定理 1. 以 $2w$, $2w'$ 为周期的函数所成的域 K 可以找到两个函数 $\gamma(z)$, $\gamma'(z)$, 适合于

$$\gamma'^2(z) = 4\gamma^3(z) - g_2\gamma(z) - g_3,$$

使K的任一函数都可以表成为 $\gamma(z)$, $\gamma'(z)$ 的有理函数.

如果任给两个适合于 $g_2^3-27g_3^2\neq 0$ 的数 g_2, g_3, 我们一定有椭圆函数 $\gamma(z)$ 存在, 则我们就得出以下的结论:

所有形如 $R(z, W)$, $(W^2=4z^2-g_2z-g_3)$ 的函数对四则运算而自封, 这儿 $R(z, W)$ 是 z, W 的有理函数,如果用参变数表示法 $z=\gamma(u)$, $W=\gamma'(u)$, 则 $R(z, W)$ 变成为 u 的椭圆函数的整体.

退回一步看 $R(z, \sqrt{az^2+bz+c})$, 甚至于较一般些看 $R(z, W)$, 此处 Z, W 适合于关系

$$az^2+2bzW+cW^2+2dz+2cW+f=0.$$

以往(第一卷第 9 章第 7 节)我们知道存在参变数 t 使

$$z=R_1(t),\quad W=R_2(t).$$

这儿 R_1, R_2 是 t 的有理函数, 代入后使 $R(z, W)$ 成为 t 的有理函数所成的集合. 将来我们将证明 $R(z, \sqrt{4z^3-g_2z-g_3})$ 不能有参数 t 表示法使它变为 t 的有理函数的集合.

看了这个例子, 也许认为我们应当考虑 $R(z, W)$ 之中 z, W 适合于三次多项式的域. 这种企图看来不大, 但是实际上, 还是太大了. 最简单的特例 $W^2=4z^3-g_2z-g_3$ 就是椭圆函数的理论. 而一般的三次关系,却超过了椭圆函数的理论.

但是 $R(z, \sqrt{a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4})$ 却并不超过椭圆函数的理论,其理由是命 z_0 是 $a_0z^4+a_1z^3+a_2z+a_3=0$ 的一根. 用变换 $z-z_0=u$, 故不妨假定 $a_4=0$, 再利用变形 $z=\dfrac{1}{v}$, 则

$$\sqrt{a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z}=\frac{1}{v^2}\sqrt{a_3v^3+a_2v^2+a_1v+a_0}.$$

化为以上的情况.

一般地讲,研究域 $R(x, y)$, 其中 x, y 有关系

$$f(x, y)=0$$

是代数函数论及代数几何的问题,由此启发出来的函数论称为自型函数,它当然概括了椭圆函数论为其一例.

§16. 反问题

命 w,w' 是一对适合于 $\vartheta(w'/w)>0$ 的复数. 我们已经知道有一个椭圆函数 $\gamma(Z; w, w')$存在,它有两个不变量 g_2, g_3. 这 g_2, g_3 的定义是:

$$g_2(w, w')=60\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(mw+m'w')^4},$$
$$g_3(w, w')=140\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(mw+m'w')^6}. \tag{1}$$

这儿 Σ' 代表在和号中省去 $m=m'=0$ 的一项. 我们已经证明过 $g_2^3-27g_3^2\neq 0$.

现在提出反问题: 给了任意两个 a, b, 它们适合于 $a^3-27b^2\neq 0$, 我们能否找出

w, w', 使 $g_2(w, w')=a$, $g_3(w, w')=b$?

为了解决这个重要问题,我们引进了一个函数 $J(\tau)$, 它的定义如下:

命 $\Delta(w, w')=g_2^3-27g_3^2$, 命 $\tau=w'/w$, 则 $g_2(w, w')=w^{-4}g_2(1, \tau)$. $g_3(w, w')=w^{-6}g_3(1, \tau)$. $\Delta(w, w')=w^{-12}\Delta(1, \tau)$. 因此命

$$J(\tau)=\frac{g_2^3(1, \tau)}{\Delta(1, \tau)}=\frac{g_2^3(w, w')}{\Delta(w, w')},$$

则

$$J(\tau)-1=\frac{27g_3^2(1, \tau)}{\Delta(1, \tau)}. \tag{2}$$

这函数 $J(\tau)$ 有以下的重要性质:

定理 1. 在上半平面 $\vartheta(\tau)>0$ 上, 函数 $J(z)$ 是解析的, 对任意适合于

$$ad-bc=1$$

的整数常有

$$J\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=J(\tau). \tag{3}$$

证. 1) 先证在上半平面 $\vartheta\tau>0$. 级数

$$g_2(1, \tau)=60\sum_{m, n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m+n\tau)^4}$$

代表一解析函数. 由于每一项都是解析函数,因此如能证明在任一带形区域 S:

$$-a\leqslant R\tau\leqslant a, \quad \vartheta_\tau\geqslant b,$$

级数一致收敛即可. 这儿 a、b 是任意二正数.

命 h 等于平行四边形 $(0, 1, 1+\tau, \tau)$ 的两个高的较小的一个. 如果 τ 在 S 中, 则一定存在一个 $\varepsilon>0$ 使 $h\geqslant\varepsilon$. 用 §8 已经用过的方法可证级数的一致收敛性,故在上半平面 $g_2(1, \tau)$ 是 τ 的解析函数.

同法证明 $g_3(1, \tau)$, $\Delta(1, \tau)$ 都是. 由于 $\Delta(1, \tau)\neq 0$, 因此, $J(\tau)$ 也是上半平面的解析函数.

2) 命 $W'=aw'+bw$, $W=cw'+dw$, $ad-bc=1$, 而 a, b, c, d 是整数,则

$$T=W'/W=(aw'+bw)/(cw'+dw)$$
$$=(a\tau+b)/(c\tau+d).$$

由于 $ad-bc>0$, 它把 τ 的上半平面变为 T 的上半平面,并且有

$$g_2(w, w')=g_2(W, W'),$$
$$g_3(w, w')=g_3(W, W'),$$

因此

$$J(\tau)=\frac{g_2^3(w, w')}{\Delta(w, w')}=\frac{g_2^3(W, W')}{\Delta(W, W')}=J\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),$$

适合于关系 (3) 的函数称为模函数. 变形 $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$ 称为模群. 在研究 $J(\tau)$ 之前我们先讲模群和模函数的一般性质.

§17. 模 变 换

我们来研究由模变换

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}$$
所组成的模群. 这里, a, b, c, d 为满足 $ad-bc=1$ 的整数. 一般来说, 每个模变换均有二个不同的定点(即 $z'=z$), 即二次方程
$$cz^2+(d-a)z-b=0$$
之二根.

若 z_1, z_2 为式之二根,则该变换可以写成标准形式
$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2}=\lambda\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$
取 $z=\infty$, 则 $z'=a/c$, 故
$$\lambda=\frac{a-cz_1}{a-cz_2}.$$
若 $|\lambda|=1$, $\lambda\neq 1$, 此变换称为椭圆的.

若 λ 是实数,而 $\neq\pm 1$, 则称为双曲的.

若 λ 是复数, $|\lambda|\neq 1$, 则称为等纬角的 (Loxodromic).

若二定点相吻合,则称为抛物的.

若有一变换连续用若干次而成为单位变换 E, 则称为有限次变换. 最小之次数使其成为单位变换者,称为该变换之周期. 仅当椭圆变换且 $\lambda^n=1$ 时有周期, 其周期即为最小的使 $\lambda^n=1$ 的正整数 n. 当 $n=2$ 时,则 $\lambda=-1$, 周期为 2 之变换称为对合.

容易证明 λ 适合二次方程.
$$\lambda+\lambda^{-1}=a^2+d^2+2bc=(a+d)^2-2.$$
此二次方程之判别式为
$$[(a+d)^2-2]^2-4=(a+d)^2[(a+d)^2-4].$$
在讨论中,不妨假定 $a+d\geqslant 0$, 若不然可将 a, b, c, d 换成 $-a, -b, -c, -d$.

1) 若 $a+d>2$, 则得双曲变换,有二个实数定点,此二定点乃二次方程
$$cz^2+(d-a)z-b=0$$
之根. 此二次方程有有理根的条件为
$$(d-a)^2+4bc=(a+d)^2-4=u^2.$$
u 为一整数. 因为 $x^2-y^2=4$ 的整数解只有 $u=\pm 2$, $y=0$, 而无其他, 故双曲模变换的定点一定是有理系数二次方程的根,而非有理数. 这种数称为二次代数数.

2) 若 $a+d=2$, 则 $\lambda=1$, 得到抛物变形
$$\frac{1}{z'-(a-1)/c}=\frac{1}{z-(a-1)/c}+c.$$
若 $c=0$, 则 $a=d=1$, 而得
$$z'=z+b.$$
前者以有理数 $(a-1)/c$ 为定点,后者以∞为定点.

3) 若 $a+d=1$, 则
$$\lambda^2+\lambda+1=0.$$
于是 λ 为 $\rho=e^{2\pi i/3}=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, 或 ρ^2, 而固定点为

$$z_1=\frac{a+\rho^2}{c},\quad z_2=\frac{a+\rho}{c}.$$

标准形式为

$$\frac{z'-(a+\rho^2)/c}{z'-(a+\rho)/c}=\rho\frac{z-(a+\rho^2)/c}{z-(a+\rho)/c}.$$

此为一椭圆变换,周期为 3. 若 ρ 换成 ρ^2, 则得另一周期为 3 的椭圆变换.

4) $a+d=0$, 则 λ 之方程为 $(\lambda+1)^2=0$, 即 $\lambda=-1$. 而定点为

$$cz^2-2az-b=0$$

之根. 即

$$z=\frac{a\pm i}{c}.$$

而标准形式为

$$\frac{z'-(a+i)/c}{z'-(a-i)/c}=-\frac{z-(a+i)/c}{z-(a-i)/c}.$$

这是一椭圆变换,周期是 2.

总之,若 $a+d=0$, 则模变换代表一对合;若 $a+d=\pm 1$, 则代表一周期为 3 之变换;若 $a+d=\pm 2$, 则得抛物变换,其定点是有理数或无穷;若 $|a+d|>2$, 则得双曲变换,其定点在实轴上,并且是二次代数数.

§18. 基 域

定义 1. 上半平面的两点 z, z', 如能有一模变换将 z 变成 z', 则此二点称为相似. 以 $z\sim z'$ 表示之.

显然有

(i) $z\sim z$;

(ii) 若 $z\sim z'$, 则 $z'\sim z$;

(iii) 若 $z\sim z'$, $z'\sim z''$,则 $z\sim z''$.

作在上半平面的域

$$D:\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ x^2+y^2>1, \quad 当\ x>0\ 时,\\ x^2+y^2\geqslant 1, \quad 当\ x\leqslant 0\ 时.\end{cases}$$

图 71

定义 2. 在 D 上的点称为既约点, D 称为基域,故 D 为一三角形,其三角的度数为 $\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

定理 1. 无二既约点可以彼此相似.

证. 若 z, z' 为二不同的既约点,且

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}.$$

若命 $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$, 于是

$$y' = \frac{y}{|cz+d|^2}.$$

今有

$$|cz+d|^2 = c^2 z\bar{z} + cd(z+\bar{z}) + d^2 = c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2 \geqslant c^2 - |cd| + d^2 > 1.$$

但是须除去可能的例外：$c = \pm 1$, $d = 0$，或 $c = 0$, $d = \pm 1$，或 $c = d = 1$. 故将可能的例外情况除去后常有

$$y' < y.$$

当 $c = d = 1$ 时，仅当 $z = \rho$ 时，有 $|cz+d|^2 = 1$. 由于 $a - b = 1$ 及 $\rho^2 + \rho + 1 = 0$，则

$$z' = \frac{a\rho + b}{\rho + 1} = -\frac{a\rho + b}{\rho^2} = -a\rho^2 - b\rho = -\rho^2 + b.$$

故 $\vartheta(z') = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 若 $z' \in D$，则 $z' = \rho$，而与 $z' \neq \rho$ 矛盾.

但

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + d},$$

故常有

$$y < y'.$$

同样须除去可能的例外：$c = \pm 1$, $a = 0$；或 $c = 0$, $a = \pm 1$.

不可能同时有 $y > y'$ 及 $y' > y$. 故仅须研究以下的情况：

(i) $c = 0$, $a = d = 1$;

(ii) $c = 1$, $a = d = 0$.

在第一种情况下

$$z' = z + b, \quad b \neq 0.$$

即 $x' = x + b$. $|x' - x| \geqslant 1$，故 z, z' 不能都在 D 中.

在第二种情况下，$b = -1$，即

$$z' = -\frac{1}{z},$$

$$|z'| \cdot |z| = 1.$$

即若 $|z| > 1$，则 $|z'| < 1$，即 z' 不能为既约点. 若 $|z'| > 1$，则 z 不能为既约点. 若 $|z| = 1$，则 z 仅能在由 ρ 到 i 的圆弧上，而 $z'(=-1/z)$ 在由 $\rho + 1$ 到 i 的圆弧上. 若 $z \neq i$，则 z' 并非既约点；若 $z = i$，则 $z' = i = z$，此与假设矛盾.

定理 2. 在长方形 $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$, $y \geqslant \gamma (\gamma > 0)$ 中，相似于一定点的点数有限. 亦即将长方形中诸点分为相似点组，则每组中点数有限.

证. 假定 $z = x + yi$,

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

则已知

$$y' = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{y}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2}.$$

若 $y' \geqslant \gamma$，则

$$c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2 \leqslant y/\gamma,$$

即

$$(cx+d)^2+c^2y^2 \leqslant y/\gamma.$$

显然只能有有限对整数 c, d 适合此式.

假定 (c', d') 是这样的一对,且 $(c', d')=1$，则适合于

$$ad'-bc'=1$$

的所有解答 (a, b) 可以表成

$$a=a'+mc', \quad b=b'+md',$$

此处 a', b' 为一固定解,即 $a'd'-b'c'=1$，而 m 为任一整数,故

$$z'=\frac{az+b}{c'z+d'}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+m.$$

仅有唯一的 m, 使 $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$. 故对一对 $(c', d')[(c', d')=1]$,仅有一组 a, b 使 $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$, 故在长方形中相似于 z 的点数有限.

定理 3. 上半平面的任一点相似于唯一的既约点.

证. 命 $z=x_0+y_0i$, $\quad y_0>0$.

取唯一的整数 m, 使

$$-\frac{1}{2} \leqslant x_0+m < \frac{1}{2}.$$

命

$$z'=z+m.$$

若 $|z'|>1$，则 z' 是既约点. 无须证明，若 $|z'|=1$，在 ρ 到 i 的弧上，即为既约点. 若在 $1+\rho$ 到 i 的弧上,则可用 $-\frac{1}{z}$ 变为上述情况. 若 $|z'|<1$，则使

$$z''=-\frac{1}{z'},$$

而

$$y''=\frac{y_0}{|z'|^2}>y_0.$$

取 m', 使

$$z'''=z''+m', \quad -\frac{1}{2} \leqslant x''' < \frac{1}{2}.$$

若 z''' 还不是既约点,用同样方法,做出 $z''''=-\frac{1}{z'''}$. 于是得出 z', z''', $\cdots$ 等都在长方形

$$-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}, \quad y>y_0$$

内. 由定理 2, 已知其个数仅能有限.

故任一点一定与一既约点相似. 又由定理 1 已知,不能有二既约点相似,这就证明了定理.

习题 1. 凡

$$z = \frac{a+i}{c}, \quad a^2 + bc + 1 = 0$$

皆相似于 i.

习题 2. 凡

$$z = \frac{a+\rho}{c}, \quad a(1-a) - bc = 1$$

皆相似于 ρ.

§19. 基 域 纲

定理 1. 若 z 非模变换的定点之一，而 U, V 为二不同的模变换，则

$$Uz \neq Vz.$$

Uz 代表变换 U 将 z 变成的点.

证. 若 $Uz = Vz$，则

$$z = U^{-1}Vz.$$

而得出 z 是定点.

定理 2. 作基域之所有的映象，所得出的诸三角形填满上半平面，且无重复部分.

证. 上半部分可由上节定理 3 知之. 若 U 及 V 为二不同的模变换，将基域 D 变为有公共部分的二三角形，则 $U^{-1}V$ 必变 D 为一与 D 有公共部分之三角形. 命 z 为公共部分中的一点，则 D 中必有一点与之相似，故其都在 D 中是不可能的.

这定理可以以堆砖为喻. 在普通空间中，可以用等大的正方形的砖填满空间. 而所谓等大的意义是，可以将一砖"搬"占到另一砖的地位.

现在的"基域"乃砖的模形. "搬动"乃模变换. 上述定理就是说，这样的砖可以填满上半平面，此乃非欧几何学的说法.

基域的定义作如下的更动：具有下列性质的上半平面的一个域称为基域：

(i) 任一点必与其中之一点相似；

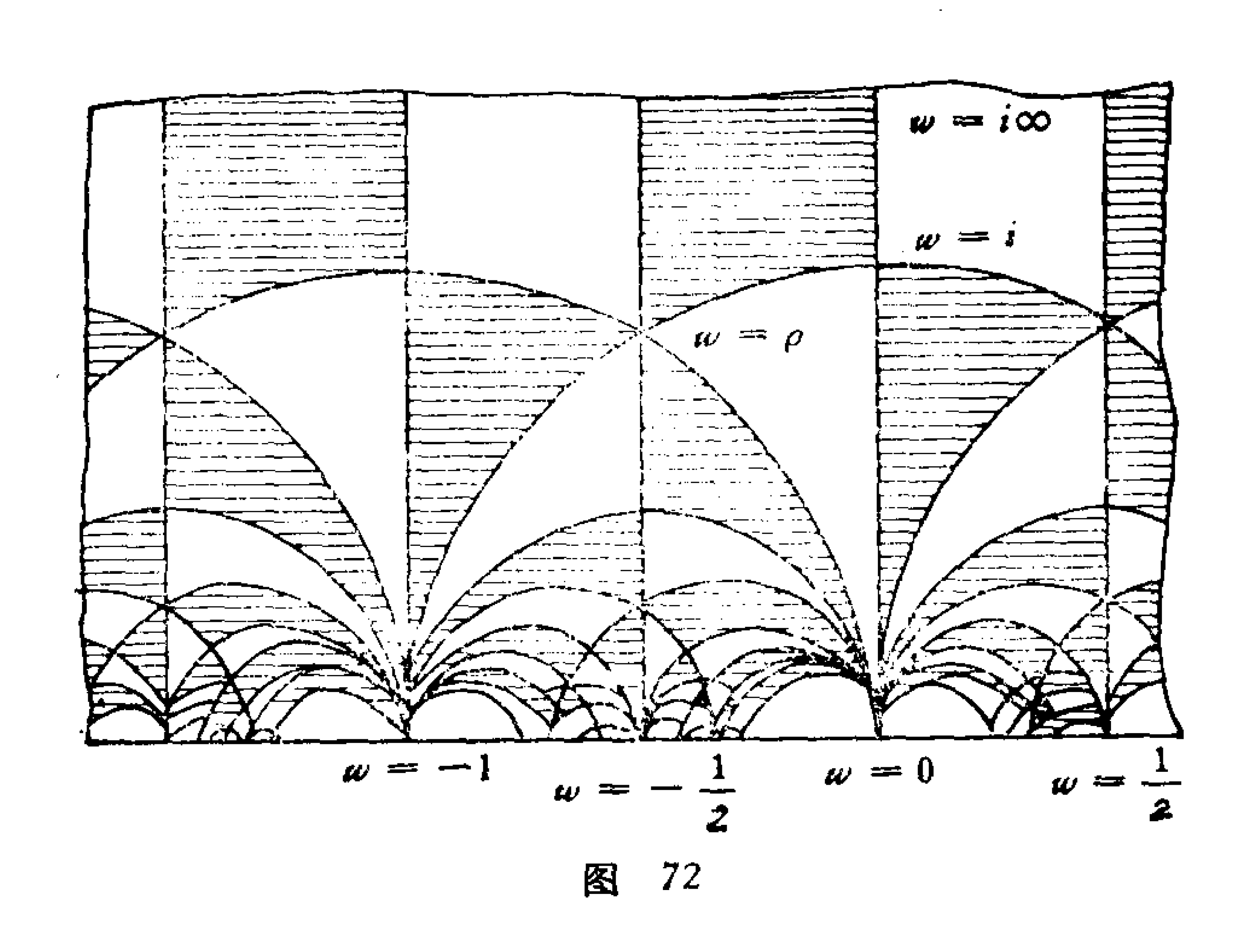


图 72

(ii) 其中任二点不相似.

在上半平面中任取一点 z, 非一模变换的定点,在平面上作此点的相似点

$$z_1, z_2 \cdots.$$

作 (z, z_i) 的垂直平分线,即其上的点与 z 及 z_i 的非欧距离相等者,舍弃在 z_i 的一面的那部分. 所剩下的部分, 成一基域(读者试补出其证明. 并试求出取 $z = z_i$ 时所得出的基域).

这说明了, Лобачевский 几何在函数论中有其实际的意义.

周期为 2 的椭圆变换的定点在角度为 $\frac{\pi}{3}$ 的二角所夹的边上. 周期为 3 的椭圆变换的定点有六个三角形以之为公顶. 有无数个边经过抛物定点. 双曲定点不能为三角形的顶点(不能在边上更为明显).

§ 20. 模群三构造

今以 S 代表 $z' = z + 1$, T 代表 $z' = -\frac{1}{z}$, 则 S^{-1} 代表 $z' = z - 1$. 此三变换将基域变为其相邻之三域,反之,将基域变为基域之变换必为 S, T 或 S^{-1} 之一.

命 M 为任一模变换, z 为基域 D 内部之任一点. 以曲线连接 z 与 M_z, 使此曲线不过顶点. 假定所过之域依次名为:

$$D, D_1, D_2, \cdots, D_n(=MD).$$

又命将 D 变为 D_i 的模变换为 M_i, 则 $M_1 = S, T$, 或 S^{-1}. 假定 M_k 可由 S 及 T 的乘方之积表出,因为 M_k^{-1} 将 D_k 变为 D, D_{k+1} 是 D_k 的邻域,故 M_k^{-1} 将 D_{k+1} 变为 D 的邻域 D'_{k+1}. 但 D'_{k+1} 经过 $M'^{-1}(=S, T$ 或 $S^{-1})$ 变为 D. 即

$$M'^{-1}M_k^{-1}D_{k+1} = M'^{-1}D'_{k+1} = D,$$

亦即

$$M_kM'D = D_{k+1}.$$

故 $M_{k+1} = M_kM'$ 可由 S 及 T 的乘方之积表出,而 M 亦然,由此已证明了

定理 1. 任一模变换可由 S 及 T 的乘方之积表出.

定理 1 的具体意义为: 若

$$M = S^{m_1}TS^{m_2}TS^{m_3}\cdots TS^{m_v},$$

则

$$z' = m_1 - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_4} - \cdots - \frac{1}{m_v + z}.$$

此显出模变换与连分数的关系.

易知 $T^2 = E$, $(ST)^3 = E$.

若扩大模变换的定义

$$z' = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc = \pm 1,$$

则可得类似的结果

$$z' = m_1 + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} + \cdots + \frac{1}{m_v + z}.$$

§ 21. 模函数的定义和性质

定义 1. 一个在上半平面纯的函数如果经过模变换而不变，则称为模函数.

由模群的性质可知，研究模函数的性质可以归结为研究它在基域中的性质. ∞ 点称为基域的抛物顶点，$i, \rho, 1+\rho$ 称为椭圆顶点，$\tau=-\frac{1}{2}$，$\tau=\frac{1}{2}$ 所定义的两边称为对边，由 ρ 到 i 及由 i 到 $1+\rho$ 的两段圆弧也称为对边. 抛物顶点是模变换 $\tau'=\tau+1$ 的不动点. 而 i 是 $\tau'=-\frac{1}{\tau}$ 的不动点. ρ 及 $1+\rho$ 是 $\tau'=-\frac{1}{\tau+1}$ 及 $\tau'=1-\frac{1}{\tau}$ 的不动点.

图 73

定理 1. 模函数 $f(\tau)$ 在 $\tau=i$ 处的零点和极点都是偶重的.

证. 假定 $\tau=i$ 处有 k 阶的零点，则

$$f(\tau)=(\tau-i)^k\varphi(\tau),$$
$$\varphi(i)=a\neq 0.$$

由于

$$f(\tau)=f\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\left(-\frac{1}{\tau}-i\right)^k\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right)=(\tau-i)^k\varphi(\tau),$$

所以，

$$\varphi(\tau)=\left(\frac{-i}{\tau}\right)^k\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

由于

$$\varphi(i)=(-1)^k\varphi(i)=\varphi(i),$$

可知 k 是偶数.

考虑 $\frac{1}{f(\tau)}$，可以同样得出 $\tau=i$ 是极点的情况.

定理 2. 模函数 $f(\tau)$ 在 $\tau=\rho$ (及 $1+\rho$) 处的零点或极点的重数是三的倍数.

与定理 1 的证法相同，但现在用关系式

$$f\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)=f(\tau)$$

即得.

定理 3. 模函数 $f(\tau)$ 有展开式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi in\tau}, \tag{1}$$

换言之，如以 $t=e^{2\pi i\tau}$ 为变数，把 $f(\tau)$ 作为 t 的函数，则它是以 $t=0$ 为孤立奇点的函数.

证. 由 $f(\tau+1)=f(\tau)$ 可知 $f(x+1+iy)=f(x+iy)$，即它是一个以 1 为周期的函数. 因此，即任一固定的 y，如果在 $x+iy(-\infty<x<\infty)$ 上 $f(\tau)$ 无极点，则

$f(\tau)$ 有 Fourier 展开式

$$f(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n(y)e^{2\pi inx},\quad P_n(y)=\int_0^1 f(\tau)e^{-2\pi inx}dx,$$

当 y 在任一有限区域时，这级数是一致收敛的.

由解析性 $\frac{d}{dx}f(\tau)=-i\frac{d}{dy}f(\tau)$ 可知

$$2\pi inP_n(y)=-iP_n'(y),$$

故得

$$P_n(y)=a_ne^{-2\pi ny},$$

即得所证.

定义 2. 模函数的展开式 (1) 仅有有限个负项的称为简单模函数.

定义 3. 在基域内简单模函数的零点(或极点)数的计算方法如下:

(i) 在基域内点，依个数及重数计算;

(ii) 在对边上算了左边的不算右边的;

(iii) 在 $\tau=i$，算一半;

(iv) 在 $\tau=\rho$，$1+\rho$ 算 1/3;

(v) 在 $\tau=\infty$，依大的重数算.

定理 4. 一个简单模函数 $f(\tau)$ 在基域内的零点数与极点数相等.

证. 1) 先假定在周界上既无零点又无极点. 考虑绕基域的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{r_1}+\int_{r_2}+\int_{l_2}+\int_{l_1}\right)d(\log f(\tau)).$$

它等于 $f(\tau)$ 的零点数减去 $f(\tau)$ 的极点数，$\tau'=\tau+1$ 把 l_1 反向地变为 l_2，故

$$\int_{l_2}+\int_{l_1}d\log f(\tau)=0.$$

又 $\tau'=\frac{-1}{\tau}$ 把 r_1 反向地变为 r_2，故也互相消去了. 即得所证.

2) 如果在边上有零点或极点，例如，在 $z=-\frac{1}{2}$ 上有一零点 z_0，则 $z=\frac{1}{2}$ 有一同样的零点 $1+z_0$. 在 z_0 作一外向的半圆(很小)，在 $1+z_0$ 作一内向的半圆，这样就可以避免边上有零点的困难.

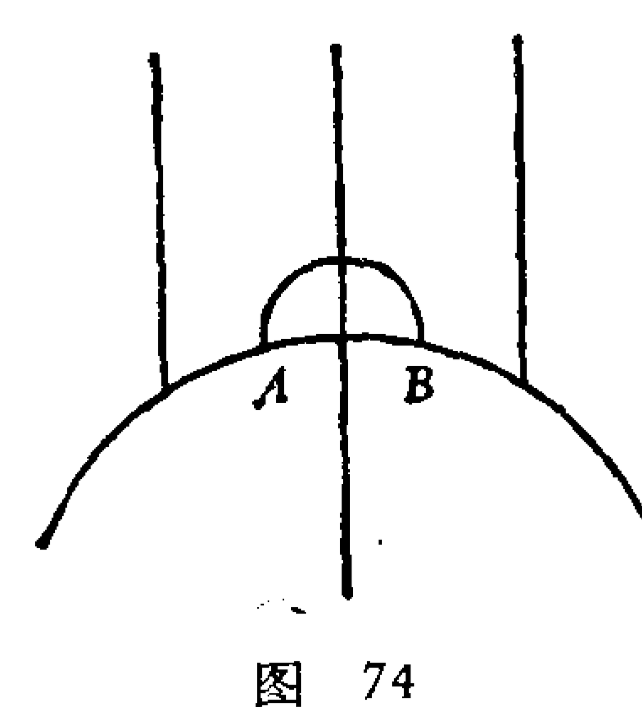


图 74

3) 如果在 $\tau=i$ 处有零点，则它是偶阶的 ($=2h$)，以之为中心，ε 为半径作一圆，交 r_1 于 A，交 r_2 于 B，沿圆弧从 A 到 B 求积分(线路取在基域内). 命 $f(\tau)=(\tau-i)^{2h}\varphi(\tau)$，则

$$\int_A^B d\log f(\tau)=2k\int_A^B d\log(\tau-i)+\int_A^B\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，最后一项趋于 0，其前一项当 $\varepsilon\to 0$ 时的积分趋于 πi，因此得出在该点的零点的重数之半.

同法处理 $\tau=\rho$ 及 $1+\rho$.

4) 考虑 $\tau=\infty$ 处的情况. 当 y_0 充分大时，作一直线 $x+iy_0$，$|x|\leqslant\frac{1}{2}$，沿此线段积分，就是绕 $t=0$ 沿圆积分，故得所云.

§ 22. $J(\tau)$

定理 1. $J(\tau)$ 在抛物顶点有一单极点，也就是如果命 $t=e^{2\pi i\tau}$，则 $J(\tau)$ 是 t 的函数,在 $t=0$ 处有一单极点.

证. 1) 由 $\operatorname{ctg}\pi\tau$ 的展开式

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\tau=\frac{1}{\tau}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{\tau-n}+\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

及

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\tau=-\pi i(1+2t+2t^2+\cdots),\quad t=e^{2\pi i\tau}$$

出发,对 τ 微商三、五次,并注意 $dt/d\tau=2\pi it$，则得

$$\left.\begin{aligned}-6\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+\tau)^4}&=-16\pi^4(t+8t^2+\cdots),\\ -120\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+\tau)^6}&=64\pi^6(t+32t^2\cdots),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

更由 (1) 式求微商可推出

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{45},\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^6}=\frac{2\pi^6}{945}, \tag{3}$$

2) 由此可推出

$$\begin{aligned}g_2(1,\tau)&=60\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)\\ &=60\left(\frac{\pi^4}{45}+\frac{16\pi^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(t^n+8t^{2n}+\cdots)\right),\end{aligned}$$

注意当 τ 换为 $n\tau$ 时，t 换为 t^n. 因此

$$g_2(1,\tau)=\pi^4\left(\frac{4}{3}+320t+\cdots\right).$$

同法证明

$$\begin{aligned}g_3(1,\tau)&=140\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^6}\right)\\ &=140\left(\frac{2\pi^6}{945}-\frac{16\pi^6}{15}\sum_{n=1}^{\infty}(t^n+32t^{2n}+\cdots)\right)\\ &=\pi^6\left(\frac{8}{27}-\frac{448}{3}t+\cdots\right).\end{aligned}$$

由此推得

$$\Delta(1,\tau)=g_2^3(1,\tau)-27g_3^2(1,\tau)=\pi^{12}(4096t+\cdots).$$

因此得

$$J(\tau)=\frac{(4/3+320t+\cdots)^3}{4096t+\cdots}=\frac{1}{1728t}+C_0+C_2t+\cdots.$$

定理 1 已经证明. 由此可推出,当 $t\to+\infty$ 时，$J(\tau)=\infty$.

定理 2. 对任一 C 方程

$$J(\tau)=C$$

在基域中有一解且有唯一解.

这是 § 6 定理 4 与本节定理 1 的直接推论.

由于

$$\frac{1}{140}g_3(1,i)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m+in)^6}=-\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-im)^6}$$
$$=-\frac{1}{140}g_3(1,i),$$

所以 $g_3(1,i)=0$，因此 $J(i)=1$.

又

$$\frac{1}{60}g_2(1,\rho)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m+\rho n)^4}=\frac{1}{\rho}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\rho^2+n)^4}$$
$$=\frac{1}{\rho}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{((m-n)-m\rho)^4}$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{1}{60}g_2(1,\rho),$$

所以 $g_2(1,\rho)=0$，即 $J(\rho)=0$. 因此得

定理 3. $J(\infty)=\infty$，$J(i)=1$，$J(\rho)=0$.

再看何时 $J(\tau)$ 是实数. 以虚轴为对称轴的变形是 $\tau'=-\bar{\tau}$，易见

$$g_2(1,\tau')=60\Sigma'\frac{1}{(m-n\bar{\tau})^4}=60\Sigma\frac{1}{(m+n\bar{\tau})^4}=\overline{g_2(1,\tau)}.$$

同样得 $g_3(1,\tau')=\overline{g_3(1,\tau)}$. 因此

$$J(\tau')=\bar{J}(\tau). \tag{4}$$

首先适合于 $\tau'=\tau$ 的点，在虚轴上，$J(\tau)=\bar{J}(\tau)$ 即 $J(\tau)$ 取实值，其次 $J(\tau'+1)=J(\tau')=\bar{J}(\tau)$，而 $\tau'+1=\tau$，即 $x=\frac{1}{2}$ 上，$J(\tau)$ 取实值，又由 $J\left(-\frac{1}{\tau'}\right)=\bar{J}(\tau)$，可知当 $\tau=e^{i\theta}$ 时，$-\frac{1}{\tau'}=e^{i\theta}$，即在圆周上，$J(\tau)$ 也取实值，即在基域的边上及虚轴上，$J(\tau)$ 取实值.

无其它的点，$J(\tau)$ 取实值，不然，τ_0 及 $-\frac{1}{\tau_0}$ 都是基域的内点，而 $J(-\bar{\tau}_0)=\bar{J}(\tau_0)=J(\tau_0)$，即有两点 τ_0，$-\bar{\tau}_0$ 取同一数值，这是不可能的.

由此可知，$J(\tau)=u+iv$ 在基域的两半，v 各取一定号，若不然 τ_1，τ_2 都在同一半中而 $v(\tau_1)>0$，$v(\tau_2)<0$，在这半域中可作一线联上 τ_1，τ_2，而因此有一点使 $v(\tau)=0$，此不可能.

今进而研究在那一半，$v>0$. 当 τ 由 ρ 到 i 基域在左边，$J(\tau)$ 由 0 变到 1，而所对应于基域的点在左边，因此在 J 平面上，是上半平面，即得.

定理 1 中 $z=J(\tau)$ 定义一个保角变换，把基域变为全平面，左半基域对应于上半平面，而边界及虚轴对应于实轴. 当 τ 沿虚轴从 i 到 ∞，z 由 1 到 $+\infty$，基域内部对应于

z 平面带上一条由 $z=1$ 沿 x 轴到 $z=-\infty$ 的裂缝.

定理 4. 模函数 J 的反函数 J^{-1} 是一个 ∞ 多值的解析函数，仅有 0, 1, ∞ 作为其奇点，其数值在上半平面上.

如果 $F(z)$ 是一亚纯函数但不取 a, b, c 三值，则函数 $G(z)=\frac{F-a}{F-c}\Big/\frac{b-a}{b-c}$ 是一不取 0, 1, ∞ 的亚纯函数，函数 $J^{-1}(G(z))$ 是一处处解析的函数，因此是一常数. 因此得:

定理 5. 不取三个值的亚纯函数是常数.

定理 6. 不取二个值的整函数是常数.

§ 23. 方程 $g_2(w, w')=a$, $g_3(w, w')=b$ 的求解

定理 1. 如果 a, b 是任意二有限数，且适合于 $a^3-27b^2\neq 0$, 则有一对复数 w, w', 其商非实数，使

$$g_2(w, w')=a, \quad g_3(w, w')=b. \tag{1}$$

假定 $a\neq 0$, $b\neq 0$, 由 (1) 可知

$$\frac{g_2^3(w, w')}{g_2^3(w, w')-27g_3^2(w, w')}=\frac{a^3}{a^3-27b^2},$$
$$\frac{g_2(w,w')}{g_3(w,w')}=\frac{a}{b}. \tag{2}$$

反之，如果 g_2, g_3 适合于 (2), 则也可推出 (1) 来.

命 $w'/w=\tau$, (2)的第一式是 $J(\tau)=a^3/(a^3-27b^2)$, 由从 § 6 定理 2 可知在 τ 的上半平面有一解，τ 已知，则由 (2) 的第二式

$$\frac{w^2g_2(1, \tau)}{g_3(1, \tau)}=\frac{a}{b}$$

可以得出 w 来，而 $w'=w_\tau$.

如果 $a=0$, 则问题等价于求 $J(\tau)=0$, $w^{-6}g_3(1, \tau)=b$ 的解. 由此求出 $\tau=\rho$, 而且 $w=(g_3(1, \rho)/b)^{1/6}$.

同法处理 $b=0$ 的情况.

§ 24. 任一模函数是 $J(\tau)$ 的有理函数

任一简单模函数 $f(\tau)$ 在基域中只有有限个零点及极点 (如果不然，则无穷远点必然是 t 的孤立奇点了)，命 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为其零点，b_1, b_2, $\cdots$, b_n 为其极点作函数

$$F(\tau)=\frac{(J(\tau)-J(a_1))\cdots(J(\tau)-J(a_n))}{(J(\tau)-J(b_1))\cdots(J(\tau)-J(b_n))},$$

如此，$J(\tau)/F(\tau)$ 在基域内既无零点又无极点，因此它是一常数. 但注意，如果 i 是零点，则它一定是 $2k$ 重零点，我们所用的因子是 $(J(i)-1)^k$. 同样处理 $\tau=\rho$ 时的情况.

公式汇编* (weierstrass)

I 背 景

$$\sin \pi u = \pi u \prod_n{}' \left\{\left(1-\frac{u}{n}\right)e^{\frac{u}{n}}\right\}. \tag{1}$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi u = \frac{1}{u} + \sum_n{}' \left\{\frac{1}{u-n}+\frac{1}{n}\right\}. \tag{2}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} = \sum_n \frac{1}{(u-n)^2}. \tag{3}$$

$$\prod_n \left\{\left(1-\frac{u}{n-a}\right)e^{\frac{u}{n-a}}\right\} = \frac{\sin \pi(u+a)}{\sin \pi a} e^{-u\pi \operatorname{ctg} \pi a}. \tag{4}$$

$$\sum_n \left\{\frac{1}{u+a-n}+\frac{1}{n-a}\right\} = \pi\,[\operatorname{ctg} \pi(u+a) - \operatorname{ctg} \pi a]. \tag{5}$$

II

$$\sigma(u) = u \prod_S{}' \left\{\left(1-\frac{u}{S}\right)e^{\frac{u}{S}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{S^2}}\right\}. \tag{1}$$

这儿 $S=2mw+2m'w'$, $\vartheta(w/w')>0$, $\prod_S{}'$ 代表 m, m' 过所有的整数的乘积,但$m=m'=0$ 的一项除外.

$$\zeta(u) = \frac{d}{du}\log\sigma(u) = \frac{1}{u} + \sum_S{}' \left\{\frac{1}{u-S}+\frac{1}{S}+\frac{u}{S^2}\right\}. \tag{2}$$

$$\gamma(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_S{}' \left\{\frac{1}{(u-S)^2}-\frac{1}{S^2}\right\}. \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2}\gamma(u) = \sum_S \frac{1}{(u-S)^3}. \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(-u) = -\sigma(u), \quad \gamma(-u) = \gamma(u), \\ &\zeta(-u) = -\zeta(u), \quad \gamma^{(n)}(-u) = (-1)^n \gamma^{(n)}(u). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

III

$$\sigma(\lambda u \mid \lambda w, \lambda w') = \lambda \sigma(u \mid w, w'). \tag{1}$$

$$\zeta(\lambda u \mid \lambda w, \lambda w') = \frac{1}{\lambda}\zeta(u \mid w, w'). \tag{2}$$

$$\gamma(\lambda u \mid \lambda w, \lambda w') = \frac{1}{\lambda^2}\gamma(u \mid w, w'). \tag{3}$$

$$\gamma^{(n)}(\lambda u \mid \lambda w, \lambda w') = \frac{1}{\lambda^{n+2}}\gamma^{(n)}(u \mid w, w'). \tag{4}$$

---

* 本汇编中的公式,有些是本章所有的,有些是不难推得的. 读者可自证之.

IV

$$\left.\begin{aligned}&g_2 = 60 \sum_S{}' \frac{1}{S^4}, \quad g_3 = 140 \sum_S{}' \frac{1}{S^6},\\&g_2(\lambda w, \lambda w') = \lambda^{-4} g_2(w, w'),\\&g_3(\lambda w, \lambda w') = \lambda^{-6} g_3(w, w').\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots. \tag{2}$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^5}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^7}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} + \cdots. \tag{3}$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{g_3 u^4}{2^2 \cdot 7} + \frac{g_2^2 u^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} + \cdots. \tag{4}$$

V

$$\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)} e^{-u\zeta(a)+\frac{1}{2}u^2\gamma(a)} = \prod_S \left\{\left(1 - \frac{u}{S-a}\right) e^{\frac{u}{S-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(S-a)^2}}\right\}. \tag{1}$$

$$\zeta(u+a) - \zeta(a) - u\gamma(u) = \sum_S \left\{\frac{1}{u+a-S} - \frac{1}{a-S} + \frac{u}{(a-S)^2}\right\}. \tag{2}$$

$$\gamma(u+a) - \gamma(a) = \sum_S \left\{\frac{1}{(u+a-S)^2} - \frac{1}{(a-S)^2}\right\}. \tag{3}$$

VI

$$\sigma(u+2w) = -e^{2\eta(u+w)}\sigma(u). \tag{1}$$

$$\sigma(u+2w') = -e^{2\eta'(u+w')}\sigma(u). \tag{2}$$

$$\eta w' - \eta' w = \frac{\pi i}{2}. \tag{3}$$

$$\sigma(u+2mw+2nw') = (-1)^{mn+m+n} e^{(2m\eta+2n\eta')(\eta+mw+nw')}\sigma(u). \tag{4}$$

$$\zeta(u+2mw+2nw') = \zeta(u) + 2m\eta + 2n\eta'. \tag{5}$$

$$\zeta(w) = \eta,\ \zeta(w') = \eta',\ \zeta(w+w') = \eta + \eta'. \tag{6}$$

$$\gamma(u+2mw+2nw') = \gamma(w). \tag{7}$$

$$\gamma'(u+2mw+2nw') = \gamma'(u). \tag{8}$$

$$\gamma'(w) = \gamma'(w') = \gamma'(w+w') = 0. \tag{9}$$

VII

$$\gamma(w) - \gamma(v) = -\sigma(u+v) \cdot \sigma(u-v)/\sigma^2(u)\sigma^2(v). \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\gamma(w_1) = e_1,\ \gamma(w_2) = e_2,\ \gamma(w_1+w_2) = e_3,\\&e_1 + e_2 + e_3 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\gamma'^2(u) = 4(\gamma(u)-e_1)(\gamma(u)-e_2)(\gamma(u)-e_3),\\&g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2),\\&g_3 = 4e_1e_2e_3.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\gamma''(u) = 6\gamma^2(u) - \frac{1}{2} g_2. \tag{4}$$

$$\gamma'''(u) = 12\gamma(u)\gamma'(u). \tag{5}$$

VIII

$$J(\tau) = \frac{27g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} + 1, \quad \tau = w'/w. \tag{1}$$

$$J(\tau + 1) = J(\tau). \tag{2}$$

$$J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = J(\tau). \tag{3}$$

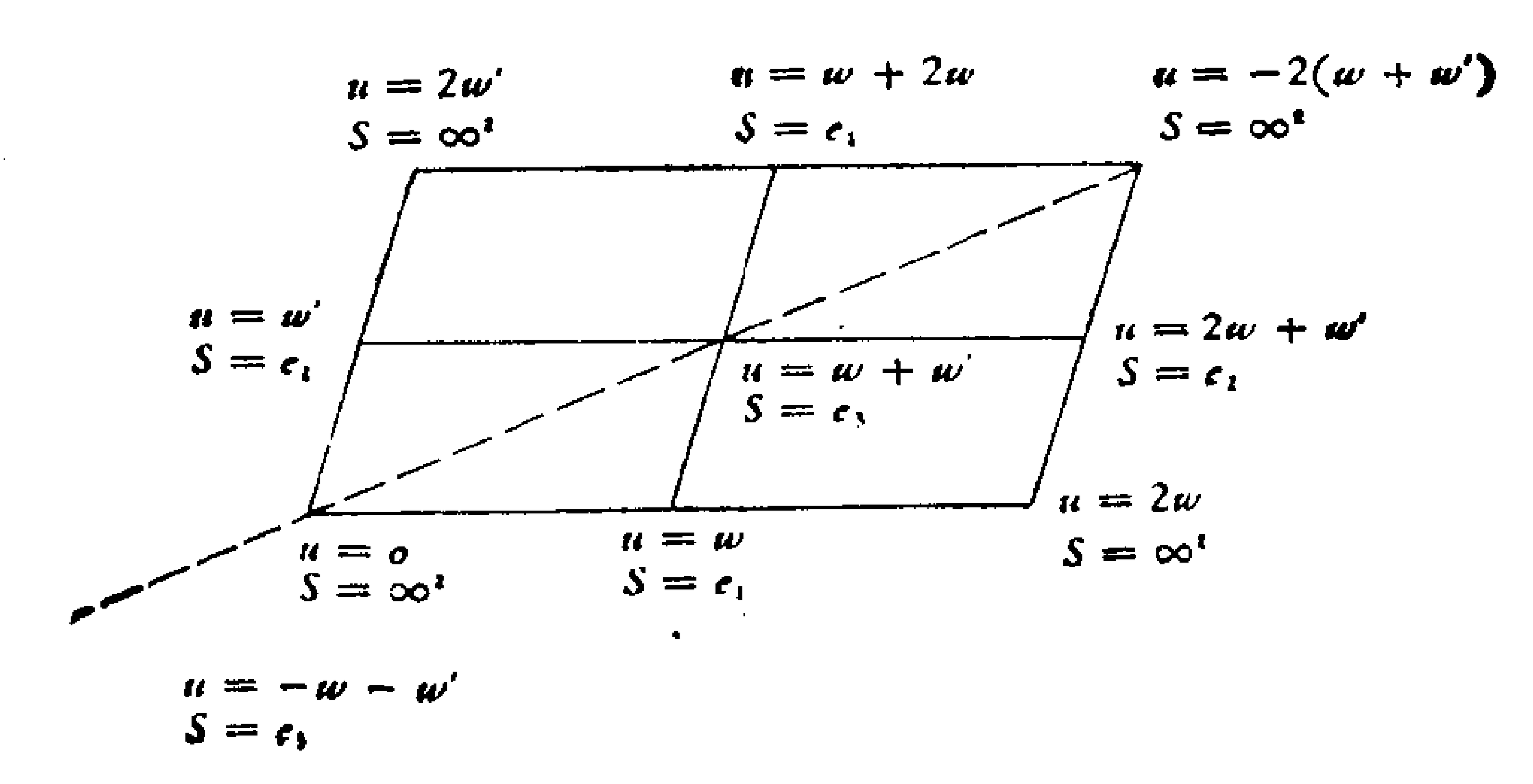


图 75 $S = p(u)$

第十四章　Jacobi 的椭圆函数

§1. ϑ 函数

以上所说的一些椭圆函数的表达式收敛速度都是很缓慢的，在计算数值时很不方便．这一缺点可由 Jacobi 的 Theta 函数来弥补，它们有迅速的收敛表达式，而且通过它们可以表示出椭圆函数来．

我们现在用符号

$$q = e^{\pi i\tau}, \quad \vartheta\tau > 0,$$

因此 $|q| < 1$.

定义.

$$\vartheta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz}, \tag{1}$$

当 $|z| < A$ 时

$$|q^{n^2} e^{2niz}| \leqslant |q|^{n^2} e^{2nA},$$

由于当 $n \to \infty$ 时

$$|q|^{n^2} e^{2nA} / |q|^{(n-1)^2} e^{2(n-1)A} = |q|^{2n+1} A^2 \to 0,$$

故级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |q|^{n^2} e^{2nA}$$

是收敛的．因此 (1) 在任何一有限域内一致收敛．所以，$\vartheta(z, q)$ 是 z 的整函数．

显然有

$$\vartheta(z, q) = +2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz. \tag{2}$$

因此立刻推得

$$\vartheta(z + \pi, q) = \vartheta(z, q). \tag{3}$$

再则

$$\vartheta(z + \pi\tau, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{2n} e^{2niz}$$

$$= -q^{-1} e^{-2iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz},$$

即得

$$\vartheta(z + \pi\tau, q) = -q^{-1} e^{-2iz} \vartheta(z, q). \tag{4}$$

我们定义因子 $-q^{-1}e^{-2iz}$ 为周期 $\pi\tau$ 的乘子．因此 $\vartheta(z, q)$ 是以 1，$-q^{-1}e^{-2iz}$ 为乘子，以 π，$\pi\tau$ 为周期的函数．

按照通常惯例，用 $\vartheta_4(z, q)$ 表这 $\vartheta(z, q)$，其它三个 ϑ 函数的定义如下：

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z, q) &= -ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau, q\right)\\ &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z,\end{aligned} \tag{6}$$

及

$$\begin{aligned}\vartheta_2(z, q) &= \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right)\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z.\end{aligned} \tag{7}$$

显然 $\vartheta_1(z, q)$ 是 z 的奇函数，而其它是 z 的偶函数。

为简单起见，以后用 $\vartheta_\nu(z)$ 来代表 $\vartheta_\nu(z, q)$. 有时为了突出 τ，也用 $\vartheta_\nu(z|\tau)$ 来表之. ϑ_ν 也用来表 $\vartheta(0)$，ϑ_1' 代表 $\vartheta_1(z)$ 的微商，代以 $z = 0$ 的数值.

易于证明 ϑ 函数的乘子如下表：

	$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
π	-1	-1	1	1
$\pi\tau$	$-N$	N	N	$-N$

(8)

这儿 $N = q^{-1}e^{-2iz}$.

由此立刻推得对任一 ϑ 都有

$$\frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)} = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}. \tag{9}$$

求对数微商立得

$$\frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)} = -2i + \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}. \tag{10}$$

习题 1. 试证

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) + \vartheta_2(2z, q^4),$$
$$\vartheta_4(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) - \vartheta_2(2z, q^4).$$

习题 2.

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= -\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = -iM\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)\\ &= -iM\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),\end{aligned}$$

$$\vartheta_2(z) = M\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$
$$= \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$
$$\vartheta_3(z) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = M\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$
$$= M\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),$$
$$\vartheta_4(z) = -iM\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = iM\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$
$$= \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$

这儿 $M = q^{\frac{1}{4}}e^{iz}$.

§2. ϑ 函数的零点与无穷乘积的表达式

如果 z_0 是一个 $\vartheta(z)$ 的零点，则
$$z_0 + m\pi + n\pi\tau$$
也都是. 这儿 m, n 是任意整数，这些点称为与 z_0 相合的点.

定理 1. 对任一 t, 在以
$$t,\ t+\pi,\ t+\pi+\pi\tau,\ t+\pi\tau$$
为顶点的平行四边形 C 中，ϑ 只有一个单零点.

证. 由于 $\vartheta(z)$ 是整函数，所以 C 中 ϑ 的零点的个数等于
$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi}\left[\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)}\right]dz$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi\tau}\left[\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)}\right]dz.$$

由 §1, (9), (10) 可知
$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i dz = 1.$$

$\vartheta_1(z)$ 显然以 0 为零点，因而 $\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$, $\vartheta_4(z)$ 各有 $0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau, \frac{1}{2}\pi\tau$ 及其相合的点为零点.

定理 2. 关于 ϑ 函数有下列无穷乘积表达式.
$$\vartheta_1(z) = 2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}),$$
$$\vartheta_2(z) = 2Gq^{\frac{1}{4}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}),$$

$$\vartheta_3(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}),$$

$$\vartheta_4(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}).$$

这儿 $G = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})$ 将在下节中证明.

证. 以 $\vartheta_4(z)$ 为出发点,已知它的零点是

$$\frac{1}{2}\pi\tau + m\pi + n\pi\tau. \qquad (m,\ n \text{ 是整数})$$

显然

$$1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2} = (1 - q^{2n-1}e^{2iz})(1 - q^{2n-1}e^{-2iz})$$

有零点

$$z = -\frac{1}{2}\pi\tau - \pi m + \pi\tau n, \quad -\infty < m < \infty,$$

$$z = \frac{1}{2}\pi\tau + \pi m - \pi\tau n.$$

因此乘积.

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2})$$

与 $\vartheta_4(z)$ 有相同的零点.

又显然有 $f(z+\pi) = f(z)$ 及

$$\begin{aligned} f(z+\pi\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n+1}e^{2iz})(1 - q^{2n-3}e^{-2iz}) \\ &= f(z)(1 - q^{-1}e^{-2iz})/(1 - qe^{2iz}) \\ &= -q^{-1}e^{-2iz}f(z). \end{aligned}$$

因此 $\vartheta_4(z)/f(z)$ 是一无零点的函数,且以 π, $\pi\tau$ 为其周期,因此它是一常数,以 G 表之.

以 $z + \frac{1}{2}\pi$ 代 (z),即得 $\vartheta_3(z)$ 的表达式. 再由 $\vartheta_1(z) = -iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$, $\vartheta_3(z) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$ 可得其它二式.

§ 3. $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$

定理 1. $\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$.

证. 1) 把上节的无穷乘积求 z 的对数微商,得

$$\vartheta_3'(z) = \vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{2iz}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{-2iz}}\right].$$

再求微商

$$\vartheta_3''(z) = \vartheta_3'(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{2iz}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{-2iz}}\right]$$

$$+\vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{-2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{-2iz})^2}\right].$$

命 $z\to 0$，则得

$$\vartheta_3'(0)=0,\quad \vartheta_3''(0)=-8\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

同法得出

$$\vartheta_4'(0)=0,\quad \vartheta_4''(0)=8\vartheta_4(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2},$$

$$\vartheta_2'(0)=0,\quad \vartheta_2''(0)=\vartheta_2(0)\left[-1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right];$$

又写成 $\vartheta_1(z)=\sin z,\phi(z)$，则同法

$$\phi'(0)=0\quad \phi''(0)=8\phi(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

把 $\vartheta_1(z)=\sin z,\phi(z)$ 微分三次，得

$$\vartheta_1'(0)=\phi(0),\quad \vartheta_1'''(0)=3\phi''(0)-\phi(0).$$

故得

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}-1.$$

因此

$$\begin{aligned}
&1+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}\\
&=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right]\\
&=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1+q^{n})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right]\\
&=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(1-q^n)^2-q^n(1+q^n)^2}{(1-q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right]\\
&=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}=1+\frac{\vartheta_1''(0)}{\vartheta_1(0)}.
\end{aligned}$$

即得恒等式

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}. \tag{1}$$

2）引理：$\Phi=\vartheta_i(z/\tau)(i=1,2,3,4)$ 适合于以下的偏微分方程

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=0. \tag{2}$$

这可以从 ϑ 的级数表达式直接求微商得之.

例如

$$\frac{\partial^2\vartheta_3(z/\tau)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{n^2\pi i\tau}\cos 2nz\right)$$

$$= -8\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{n^2\pi i\tau}\cos 2nz = -\frac{4}{\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_3(z/\tau).$$

3）利用微分方程（2），把（1）改写成为

$$\frac{1}{\vartheta_1'(0/\tau)}\frac{d}{d\tau}\vartheta_1'(0/\tau) = \frac{1}{\vartheta_2(0/\tau)}\frac{d\vartheta_2(0/\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\vartheta_3(0/\tau)}\frac{d\vartheta_3(0/\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\vartheta_4(0/\tau)}\frac{d\vartheta_4(0/\tau)}{d\tau}.$$

对 τ 求积分得

$$\vartheta_1'(0/\tau) = C\vartheta_2(0/\tau)\vartheta_3(0/\tau)\vartheta_4(0/\tau).$$

C 是一常数．命 $q\to 0$，则

$$q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'\to 2,\quad q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4\to 2,\quad \vartheta_3\to 4,\quad \vartheta_4\to 1.$$

因此定出 $C=1$，即得恒等式

$$\vartheta_1' = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4.$$

定理 2. $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

证．由§2的无穷乘积公式可知

$$\vartheta_1' = \phi(0) = 2q^{\frac{1}{4}}G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2,$$

$$\vartheta_4 = G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2.$$

代入定理 1 中得出

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2 = G^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2.$$

这些乘积都是绝对收敛的，因此可以任意变换次序．由

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2,$$

可知

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2 = G^2,$$

即

$$G = \pm\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}).$$

当 $q\to 0$ 时由 $\vartheta_3(z)$ 的级数及乘积两种表达法可以看出 $G\to 1$，因此得出本定理．

注意,便中我们证明了一个恒等式：当 $|q|<1$ 时,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})=1.$$

(读者试从 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})=\cdots$ 证明之.)

§4. 用 ϑ 函数表椭圆函数

假定 $f(z)$ 是以 $2w$, $2w'$ 为周期的椭圆函数.命 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为其基本零点，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为其基本极点,并假定已经使

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_r=\sum_{r=1}^{n}\beta_r$$

(从第十三章 §5 定理 5, 知这是一定可能的),我们可以证明函数

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\alpha_r)}{2w}\middle|\tau\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\pi(z-\beta_r)}{2w}\middle|\tau\right)}$$

就是一个与 $f(z)$ 有相同的零,有相同的极点及相同的周期 $2w$, $2w'$ 的函数. 因此任一椭圆函数 $f(z)$ 可以表成为

$$f(z)=A\prod_{r=1}^{n}\frac{\vartheta_1(\pi(z-\alpha_r)/2w\,|\,\tau)}{\vartheta_1(\pi(z-\beta_r)/2w\,|\,\tau)}.$$

这样的表示法比上章所述的 σ 函数表示法的优点在于：(i) ϑ 函数的表达式的收敛速度较快,便于数值计算；(ii) 在应用椭圆函数处理应用数学上的问题的时候,实周期往往特别重要,而 ϑ 函数对实周期的性质显示得特别简明.

再则,如果 $f(z)$ 在极点 β_r 处的主要部分是

$$\sum_{m=1}^{m_r}A_{m,r}(z-\beta_r)^{-m},$$

则

$$f(z)=A+\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{m_r}\frac{(-1)^{m-1}A_{m,r}}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}\log\vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\beta_r)}{2w}\middle|\tau\right)\right\}.$$

最后证明

$$\sigma(z)=\frac{2w}{\pi}\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}\right)\cdot\frac{1}{2}q^{-\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right). \tag{1}$$

先比较

$$\sigma(z)\ 与\ f(z)=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right).$$

首先它们有相同的零点.

$$2mw+2m'w',\quad m,m'\ 是整数.$$

其次

$$f(z+2w)=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}+2\eta(z+w)\right)$$
$$\cdot\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}+\pi\middle|\tau\right)=-e^{2\eta(z+w)}f(z).$$

最后

$$f(z+2w')=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}+2\tau\eta(z+w')\right)$$
$$\cdot\vartheta\left(\frac{\pi z}{2w}+\pi\tau\middle|\tau\right)=-e^{2\tau\eta(z+w')}\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}\right)\cdot q^{-1}$$
$$\cdot e^{-i\pi z/w}\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right)=-e^{2\eta'(z+w')}f(z).$$

这儿用了 $\eta w'-\eta' w=\frac{1}{2}\pi i$，即 $\eta\tau-\frac{1}{2}(\pi i/w)=\eta'$，因此 $\sigma(z)/f(z)$ 是一无零点的椭圆函数．它是一常数 C．决定这个常数可以利用

$$\lim_{z\to0}\frac{\sigma(z)}{z}=1,$$

及

$$\lim_{z\to0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to0}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right)}{z}=\frac{\pi}{2w}\cdot2Gq^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2$$
$$=\frac{\pi}{2w}\cdot2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3,$$

即得所求证的公式．

公式(1)中的 η 也可以用 ϑ 函数表出，取(1)的对数并且两次微分，得

$$-\gamma(z)=\frac{\eta}{w}-\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\csc^2\left(\frac{\pi z}{2w}\right)+\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\left[\frac{\phi''(v)}{\phi(v)}-\left\{\frac{\phi'(v)}{\phi(v)}\right\}^2\right]$$

这儿 $v=\frac{1}{2}\pi z/w$，而 $\phi(z)=\vartheta_1(z)/\sin z$．

展为 z 的升幂，并且比较 z 的系数得

$$0=\frac{\eta}{w}-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\frac{\phi''(0)}{\phi(0)},$$

因此

$$\eta=-\frac{\pi^2}{16w}\frac{\vartheta_1''}{\vartheta_1'}.$$

最后得

$$\sigma(z)=\frac{2w}{\pi\vartheta_1'}\exp\left(-\frac{v^2\vartheta_1'''}{6\vartheta_1'}\right)\vartheta_1(v|\tau).$$

这儿 $v=\frac{1}{2}\pi z/w$．

习题．求证

$$\eta'=-\left(\frac{\pi^2w'\vartheta_1'''}{12w^2w_1'}+\frac{\pi i}{2w'}\right).$$

§5. 诸 ϑ 函数的平方的关系式

定理 1.

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_3^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_2^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_4^2, \tag{1}$$

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_2^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_3^2 - \vartheta_3^2(z)\vartheta_4^2, \tag{2}$$

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(z)\vartheta_2^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_3^2, \tag{3}$$

$$\vartheta_4^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(z)\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_2^2. \tag{4}$$

证. $\vartheta_1^2(z)$, $\vartheta_2^2(z)$, $\vartheta_3^2(z)$, $\vartheta_4^2(z)$ 都是以 1, $q^{-2}e^{-4iz}$ 为乘子,以 π, $\pi\tau$ 为周期的函数,因此即所有的 a, b, a', b'

$$\frac{a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(z)},\quad \frac{a'\vartheta_1^2(z)+b'\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}$$

都是以 π, $\pi\tau$ 为周期的椭圆函数. 一般讲来,它有一个二重极点,但可以取 a, b, a', b' 使分子以此点为零点. 即能选得 a, b, a', b' 使上式仅有一单零点. 因此它是一常数. 因此有以下的关系式存在

$$\vartheta_2^2(z) = a\vartheta_1^2(z) + b\vartheta_4^2(z),$$

$$\vartheta_3^2(z) = a'\vartheta_1^2(z) + b'\vartheta_4^2(z).$$

取 $z=\frac{1}{2}\pi\tau$ 及 0, 并利用

$$\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3,\quad \vartheta_4\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=0,$$

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4,$$

可以算出

$$\vartheta_3^2 = -a\vartheta_4^2,\quad \vartheta_2^2 = b\vartheta_4^2,\quad \vartheta_2^2 = a'\vartheta_4^2,\quad \vartheta_3^2 = b'\vartheta_4^2.$$

即得出 (1), (2).

再以 $z+\frac{1}{2}\pi$ 代 z, 则得 (3), (4).

在 (4) 中取 $z=0$, 则得

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^2 = \vartheta_3^4.$$

把它写成级数形式有

$$16q(1+q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 3}+q^{3\cdot 4}+\cdots)^4 + (1-2q+2q^4 - 2q^9+\cdots)^4 = (1+2q+2q^4+2q^9)^4. \tag{5}$$

把它写成为乘积形式

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})\right\}^8 + 16q\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\right\}^8 = \left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\right\}^8. \tag{6}$$

习题. 求证

$$\vartheta_1^4(z) + \vartheta_3^4(z) = \vartheta_2^4(z) + \vartheta_4^4(z). \tag{7}$$

§6. 和差公式

现在推导出一批包有 $\vartheta_k(x+y)$ 与 $\vartheta_k(x-y)$ 的公式,其证明技巧与 §5 大同小异.

例如,我们要找一表 $\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)$ 的公式,固定 x, 这作为 y 的函数

$$D_{11}(y)=\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

由 §1(8) 可知

$$D_{11}(y+\pi)=\vartheta_1(x+y+\pi)\vartheta_1(x-y-\pi)$$
$$=\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)=\vartheta_{11}(y),$$

及

$$D_{11}(y+\pi\tau)=\vartheta_1(x+y+\pi\tau)\vartheta_1(x-y-\pi\tau)$$
$$=-q^{-1}e^{-2i(x+y)}\vartheta_1(x+y)\cdot(-q^{-1})e^{2i(x+y)}\vartheta_1(x-y)$$
$$=q^{-2}e^{-4iy}D_{11}(y).$$

这是以 1, $q^{-2}e^{-4iy}$ 为乘子, π, $\pi\tau$ 为周期的函数.

这和

$$A\vartheta_1^2(y)+B\vartheta_2^2(y) \tag{1}$$

有同样的变化公式. 因此

$$\frac{A\vartheta_1^2(y)+B\vartheta_2^2(y)}{\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)}$$

是一个椭圆函数. $D_{11}(y)$ 有两个单零点 $y=x$, $y=-x$. 如果取 $A=\vartheta_2^2(x)$, $B=-\vartheta_1^2(x)$, 则分子有零点 $y=x$. 因此, 这椭圆函数最多只能有一单极点 $y=-x$, 因而它是一常数,即得关系式

$$\vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)=C\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

这儿 C 是一个可能与 x 有关,但与 y 无关的数. 取 $y=0$, 得

$$-\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2=C\vartheta_1^2(x),\ C=-\vartheta_2^2,$$

因此得出公式

$$\vartheta_2^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)=\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y). \tag{2}$$

利用上节定理 1 的结果可以将 $\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)$ 表为其它 ϑ 函数的平方. 例如,用

$$\vartheta_4^2\vartheta_1^2(z)+\vartheta_3^2\vartheta_2^2(z)=\vartheta_2^2\vartheta_3^2(z).$$

由 (2) 可知

$$\vartheta_4^2\vartheta_1^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)=\vartheta_2^2(y)(\vartheta_2^2\vartheta_3^2(x)-\vartheta_3^2\vartheta_2^2(x))$$
$$-\vartheta_2^2(x)(\vartheta_2^2\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2\vartheta_2^2(y))=\vartheta_2^2\vartheta_2^2(y)\vartheta_3^2(x)-\vartheta_2^2\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y),$$

即得

$$\vartheta_4^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)=\vartheta_2^2(y)\vartheta_3^2(x)-\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y). \tag{3}$$

当然这也可以用证明 (2) 的方法直接证明 (3) 式.

总之可得

$$\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)=\vartheta_2^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$=\vartheta_2^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(y))$$

$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y)).$$

由 $\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_2(z)$, $\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z)$ 等公式可以推得以下的三组公式:

$$\vartheta_1(x+y)\vartheta_2(x-y) = \vartheta_2^{-1}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_2^{-1}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y)).$$

$$\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y) = \vartheta_2^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)).$$

$$\vartheta_4(x+y)\vartheta_4(x-y) = \vartheta_2^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y))$$
$$= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y)).$$

再考虑 $D_{ij}(y) = \vartheta_i(x+y)\vartheta_j(x-y)$ 也可得出一批公式. 例如,命 $D_{14}(y) = \vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)$, 则

$$D_{14}(y+\pi) = -D_{14}(y),$$
$$D_{14}(y+\pi\tau) = q^{-2}e^{-4iy}D_{14}(y).$$

因而推出

$$\frac{A\vartheta_2(y)\vartheta_3(y) + B\vartheta_1(y)\vartheta_4(y)}{\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)}$$

是一以 y 为变数,以 π, $\pi\tau$ 为周期的椭圆函数. 分母当 $x+y=0$, $x-y=\frac{1}{2}\pi\tau$ 有两个单零点,取 $A=\vartheta_1(x)\vartheta_4(x)$ 及 $B=\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)$, 可使分子在 $y=-x$ 处有一零点. 因此得出

$$\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x) + \vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y)$$
$$= C\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y).$$

命 $y=0$ 可以断定 $C=\vartheta_2\vartheta_3$, 因而有一个恒等式. 现在把同样的一些公式列在下面:

$$\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_1(x+y)\vartheta_2(x-y) = \vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_4(y) + \vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(x)\vartheta_4(x),$$

$$\vartheta_2\vartheta_4\vartheta_1(x+y)\vartheta_3(x-y)=\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x),$$
$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y),$$
$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_2(x+y)\vartheta_3(x-y)=\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)-\vartheta_1(x)\vartheta_4(x)\vartheta_1(y)\vartheta_4(y),$$
$$\vartheta_2\vartheta_4\vartheta_2(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_2(x)\vartheta_4(x)\vartheta_2(y)\vartheta_4(y)-\vartheta_1(x)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_3(y),$$
$$\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_3(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_3(x)\vartheta_4(x)\vartheta_3(y)\vartheta_4(y)-\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y).$$

从此不难推出加倍公式

$$\vartheta_2^3\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^4(x)-\vartheta_1^4(x)=\vartheta_3^4(x)-\vartheta_4^4(x),$$
$$\vartheta_3^3\vartheta_3(2x)=\vartheta_1^4(x)+\vartheta_3^4(x)=\vartheta_2^4(x)+\vartheta_4^4(x),$$
$$\vartheta_4^3\vartheta_4(2x)=\vartheta_4^4(x)-\vartheta_1^4(x)=\vartheta_3^4(x)-\vartheta_2^4(x),$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_2\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(x)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(x),$$
$$\vartheta_4^2\vartheta_2\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(x)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(x),$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_3(2x)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(x)+\vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(x),$$
$$\vartheta_4^2\vartheta_3\vartheta_3(2x)=\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(x)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(x),$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_4\vartheta_4(2x)=\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(x)+\vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(x),$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_4\vartheta_4(2x)=\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(x)+\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(x).$$

§7. ϑ 函数的商所适合的微分方程

函数

$$\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$$

是以 -1, $+1$ 为乘子，π, $\pi\tau$ 为周期的函数，因此它的微商

$$\{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)\}/\vartheta_4^2(z)$$

也有此性质. 又函数

$$\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)/\vartheta_4^2(z)$$

也是以 -1, 1 为乘子，π, $\pi\tau$ 为周期的函数，因此

$$\phi(z)=\frac{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}$$

是一以 π, $\pi\tau$ 为周期的函数，当且仅当

$$z=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$$

及其相合点时，$\phi(z)$ 才可能有极点(单).

现在考虑 $\phi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)$, 由 §1 习题 2 可知

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z),$$
$$\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z),$$
$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_3(z),$$
$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

因此

$$\phi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=\frac{\{-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)+\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)\}}{\vartheta_3(z)\vartheta_2(z)}=\phi(z).$$

即 $\phi(z)$ 是以 π 及 $\frac{1}{2}\pi\tau$ 为周期的椭圆函数，而在基域内只有一单极点 $\frac{1}{2}\pi$，因此它是一常数. 命 $z\to 0$，定出这常数是

$$\vartheta_1'\vartheta_4/\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_4^2.$$

因此得出重要的微分方程

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=\vartheta_4^2\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}. \tag{1}$$

命 $\xi=\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$，由 § 5(1)，(2) 可得

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2=(\vartheta_2^2-\xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2-\xi^2\vartheta_2^2). \tag{2}$$

这微分方程有一特解 $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$，其通解是 $\pm\vartheta_1(z+2)/\vartheta_4(z+2)$.

与(1)相仿，我们还有

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=-\vartheta_3^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}\right)=-\vartheta_2^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}. \tag{4}$$

§ 8. Jacobi 的椭圆函数

Jacobi 的三个重要的椭圆函数可以用 ϑ 函数来定义如下：

$$\operatorname{sn} u=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}, \tag{1}$$

$$\operatorname{cn} u=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}, \tag{2}$$

$$\operatorname{dn} u=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}. \tag{3}$$

由 § 5 定理 1 可知

$$\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1, \tag{4}$$

$$k^2\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{dn}^2 u=1, \tag{5}$$

这儿

$$k^{\frac{1}{2}}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}. \tag{6}$$

由 (2)，(3)，(4) 可得

$$\frac{d\operatorname{sn} u}{du}=\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u, \tag{7}$$

$$\frac{d\operatorname{cn} u}{du}=-\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u, \tag{8}$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du}=-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u. \tag{9}$$

再由(4),(5)可知 $y=\mathrm{sn}\,u$ 适合于微分方程

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2), \tag{10}$$

同样 $y=\mathrm{cn}\,u$ 适合于

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(k'^2+k^2\mathrm{cn}^2\,u), \tag{11}$$

这儿

$$k'^2=1-k^2. \tag{12}$$

$y=\mathrm{dn}\,u$ 适合于

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(y^2-k'^2). \tag{13}$$

由(6)所定义的 k 称为椭圆函数 sn 的模．有时为了明确起见，以 $\mathrm{sn}(u,k)$ 表示 $\mathrm{sn}\,u$．由(12)所定义的 k' 称为补模，但由(12)不能唯一决定 k'．我们的 k' 的确切定义是

$$k'^{\frac{1}{2}}=\vartheta_4/\vartheta_3. \tag{14}$$

由关系式 $\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4$ 显然可见(12)式成立．

§9. 周 期 性

由§1习题2的公式可知

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_2(z),\qquad \vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z),$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=-\vartheta_1(z),\qquad \vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_3(z),$$

$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_4(z),\qquad \vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

$$\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_3(z),\qquad \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z).$$

由此推得：命 $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2=K$ 及 $-\frac{1}{2}i\pi\tau\vartheta_3^2=K'$，

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(u+K)&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\right)}{\vartheta_4\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\right)}\\&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_3(u\vartheta_3^{-2})}=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\end{aligned} \tag{1}$$

及

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(u+iK')&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}{\vartheta_4\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}\\&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_4(u\vartheta_2^{-2})}{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}=\frac{1}{k\mathrm{sn}\,u}.\end{aligned} \tag{2}$$

仿此证得

$$\operatorname{cn}(u+K)=-k\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\ \operatorname{cn}(u+iK')=-\frac{i}{k}\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}, \tag{3}$$

$$\operatorname{dn}(u+K)=k'\frac{1}{\operatorname{dn}u},\quad \operatorname{dn}(u+iK')=-i\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}. \tag{4}$$

由此推得

$$\operatorname{sn}(u+2K)=-\operatorname{sn}u,\quad \operatorname{sn}(u+2iK')=\operatorname{sn}u, \tag{5}$$

$$\operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn}u,\quad \operatorname{cn}(u+2iK')=-\operatorname{cn}u, \tag{6}$$

$$\operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}u,\quad \operatorname{dn}(u+2iK')=-\operatorname{dn}u. \tag{7}$$

因而得出周期性

$$\operatorname{sn}(u+4K)=\operatorname{sn}(u+2iK')=\operatorname{sn}u, \tag{8}$$

$$\operatorname{cn}(u+4K)=\operatorname{cn}(u+2iK')=\operatorname{cn}u, \tag{9}$$

$$\operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}(u+4iK')=\operatorname{dn}u. \tag{10}$$

由于 $\vartheta_1(0)=0$, $\vartheta_4(0)\neq 0$,由(1)可知 $\operatorname{sn}0=0$. 又由 (2), (3) 可知 $\operatorname{cn}0=\operatorname{dn}0=1$. 由 (1) 可知

$$\operatorname{sn}K=1,\ \operatorname{cn}K=0,\ \operatorname{dn}K=k', \tag{11}$$

并有

$$\operatorname{sn}K'=\infty,\ \operatorname{cn}K'=\infty,\ \operatorname{dn}K'=\infty. \tag{12}$$

§10. 解 析 性 质

由于 $\vartheta_1(z)$ 的零点是 $m\pi+n\tau\pi$ (m, n 是整数),所以 $\operatorname{sn}u$ 有 $(m\pi+n\tau\pi)\vartheta_3^2=2mK+2niK'$ 为其零点. $\operatorname{sn}u$ 是以 $4K$, $2iK'$ 为周期的函数,因此在基域内有两个零点

$$u=0,\ 2K.$$

又由于 $\vartheta_4(z)$ 的零点是 $\frac{1}{2}\pi\tau+m\pi+n\tau\pi$ (m, n 是整数),因此 $\operatorname{sn}u$ 有 $iK'+2mK+2niK'$ 为其极点,即在基域内有两个极点

$$iK',\ 2K+iK'.$$

由于 $\operatorname{sn}u$ 是奇函数及

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\ \operatorname{dn}u,$$

$$\frac{d^3}{du^3}\operatorname{sn}u=4k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u-\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u(\operatorname{dn}^2u+k^2\operatorname{cn}^2u),$$

可知

$$\operatorname{sn}u=u-\frac{1}{6}(1+k^2)u^3+O(|u|^5),\quad (u\to 0)$$

同法

$$\operatorname{cn}u=1-\frac{1}{2}u^2+O(|u|^4),$$

$$\operatorname{dn}u=1-\frac{1}{2}k^2u^2+O(|u|^4).$$

因此可得

$$\mathrm{sn}\,(u+iK)=\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}=\frac{1}{ku}\left(1-\frac{1}{6}(1+k^2)u^2+O(|u|^4)\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{ku}+\frac{1+k^2}{6k}u+O(|u|^3),$$

同法

$$\mathrm{cn}\,(u+iK')=\frac{-i}{ku}+\frac{2k^2-1}{6k}ui+O(|u|^3),$$

$$\mathrm{dn}\,(u+iK')=-\frac{i}{u}+\frac{2-k^2}{6}iu+O(|u|^3).$$

因此 $\mathrm{sn}\,u$ 以 iK' 为极点其留数等于 k^{-1}. 由于两极点的留数之和为零,因此得出结论:

$\mathrm{sn}\,u$ 以 $4K$, $2iK'$ 为周期,除去

$$z\equiv iK',\ 2K+iK'\pmod{4K,\ 2iK'}$$

诸单极点外, $\mathrm{sn}\,u$ 处处解析. 在这两组极点的留数各为 k^{-1} 与 $-k^{-1}$.

同法, $\mathrm{cn}\,u$ 是以 $4K$, $2K+2iK'$ 为周期的函数,除去

$$z\equiv iK',\ 2K+iK\pmod{4K,\ 2K+2iK'}$$

诸单极点外, 无处不解析. 在这两组极点的留数各为 $-ik^{-1}$ 与 ik^{-1}, 并且以 $K\pmod{2K,\ 2iK'}$ 诸点为零点.

又 $\mathrm{dn}\,u$ 是以 $2K$, $4iK$ 为周期的函数,除去

$$z\equiv iK',\ 3iK'\pmod{2K,\ 4iK'}$$

诸单极点外无处不解析. 在这两组极点的留数各为 $-i$, i, 且在 $\equiv K+iK'\pmod{2K,\ 2iK'}$ 处有单零点.

§11. Weierstrass 函数与 Jacobi 函数之间的关系

命 e_1, e_2, e_3 是三个数, $e_1+e_2+e_3=0$, 则变化

$$y=e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(\lambda u,k)}$$

适合于

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=4(e_1-e_3)^2\lambda^2\frac{1}{\mathrm{sn}^2\lambda u}\frac{\mathrm{cn}^2\lambda u}{\mathrm{sn}^2\lambda u}\frac{\mathrm{dn}^2\lambda u}{\mathrm{sn}^2\lambda u}$$

$$=4(e_1-e_3)^2\lambda^2\frac{1}{\mathrm{sn}^2\lambda u}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\lambda u}-1\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\lambda u}-k^2\right)$$

$$=4\lambda^2(e_1-e_3)^{-1}(y-e_3)(y-e_1)\{y-k^2(e_1-e_3)-e_3\}.$$

取 $\lambda^2=e_1-e_3$ 及 $k^2=(e_2-e_3)/(e_1-e_3)$, 因此

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=4y^3-g_2y-g_3.$$

因此

$$e_3+(e_1-e_3)/\mathrm{sn}^2\left\{u(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right\}=\wp(u+\alpha;\ g_2,\ g_3).$$

这儿 α 是一常数,命 $u\to 0$, 可见 α 就是一周期. 因此得出关系式:

$$\gamma(u;\,g_2,\,g_3)=e_3+(e_1-e_3)/\mathrm{sn}^2\{u(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}\},$$

这 Jacobi 函数的模等于

$$k^2=(e_2-e_3)/(e_1-e_3).$$

§12. 加 法 公 式

定理 1.

$$\mathrm{sn}\,(u+v)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v+\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{cn}\,(u+v)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{dn}\,(u+v)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

证. 在 §6 中有公式

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y),$$

$$\vartheta_4^2\vartheta_4(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y).$$

其商是

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_4^2}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta_4(x+y)}=\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)}{\vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\,\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta_4(y)}\,\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta_4(y)}+\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta_4(y)}\,\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}\,\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)}}{1-\left(\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\right)^2\left(\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta_4(y)}\right)^2}.$$

命 $x=\vartheta_3^{-2}u,\ y=\vartheta_3^{-2}v$. 由 sn, cn, dn 的定义可知

$$\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_4^2}\mathrm{sn}\,(u+v)=\frac{\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_4^2}(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)}{1-\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

因此得出定理 1.

同法可证其它二式.

§13. 把 $K,\,K'$ 表为 $k,\,k'$ 的函数

假定 τ 是纯虚数,则 $q=e^{\pi i\tau},\ 0<q<1$. 又

$$k^{\frac{1}{2}}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},\quad k'^{\frac{1}{2}}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3},\quad (k^2+k'^2=1)$$

是实数,而且 $k^2+k'^2=\dfrac{\vartheta_2^4+\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4}=1$, 可知 $0<k<1,\ 0<k'<1$. 并由

$$K=\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2,\quad K'=-\frac{1}{2}i\pi\tau\vartheta_3^2$$

也可知它们是正数.

由 § 8(10) 立刻推出 $y=\operatorname{sn} u$ 是

$$u=\int_0^y (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{\frac{1}{2}}dt \tag{1}$$

的反函数. 由 $\operatorname{sn} K=1$, 可以推出

$$K\equiv\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \quad (\operatorname{mod} 4K,\ 2iK') \tag{2}$$

假定这积分路线是由 0 沿实轴到 1, 则可知仅能有

$$(1+4m)K=\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

这儿 m 是一整数,右边是正的,所以 m 不能为负. 如果 $m\neq 0$, 则由积分的递增性, 必有一 α 使

$$K=\int_0^\alpha (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

即 $\alpha=\operatorname{su} K<1$, 这是不可能的,因此证明了

$$K=\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{3}$$

再在 § 9 中取 $u=K$, 则得

$$\operatorname{su}(K+iK')=\frac{1}{k}.$$

因此

$$K+iK'\equiv\int_0^{\frac{1}{k}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \quad (\operatorname{mod} 4K,\ 2iK').$$

由 (3) 可知

$$iK'\equiv i\int_1^{\frac{1}{k}} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \quad (\operatorname{mod} 4K,\ 2iK').$$

同法可证

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{4}$$

换变数

$$t=(1-k'^2s^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由

$$t^2-1=\frac{k'^2s^2}{1-k'^2s^2},\quad 1-k^2t^2=\frac{k'^2(1-s^2)}{1-k'^2s^2},$$
$$dt=(1-k'^2s^2)^{-\frac{3}{2}}k'^2s\,ds,$$

可知

$$K'=\int_0^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2s^2)^{-\frac{1}{2}}ds.$$

当 $|k|<1$ 时, $(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 可以展开为对 k^2 一致收敛的幂级数,因此

$$K=\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}k^{2n}t^{2n}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)n!}k^{2n}\int_0^1(1-u)^{-\frac{1}{2}}u^{n-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!}\right)^2 k^{2n}.$$

如果把 $k^2=c$ 作为复变数看,则在单位圆 $|c|<1$ 内,K 是 $k^2=c$ 的解析函数. 我们可以证明,这函数可以解析拓展到全 c 平面上,而且如果由 1 到 ∞ 作一切口,则 K 是 c 的单值函数.

§ 14. Jacobi 椭圆函数的一些表达式

由 ϑ 函数的结果立刻推出以下的无穷乘积表达式: 命 $u=2Kx/\pi$,

$$\operatorname{sn} u = 2q^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}\sin x\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right], \tag{1}$$

$$\operatorname{cn} u = 2q^{\frac{1}{4}}k'^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos x\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\}, \tag{2}$$

$$\operatorname{dn} u = k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\}. \tag{3}$$

又将 $\operatorname{sn} u$ 作为 x 的函数来看它以 2π 为周期的奇函数,因此有 Fourier 展开式

$$\operatorname{sn} u = \prod_{n=1}^{\infty} bn\sin nx,$$

这儿

$$bn = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sn} u\sin nx dx = \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sn} u e^{inx}dx.$$

作绕以 $-\pi, \pi, \pi\tau, -2\pi+\pi\tau$ 为顶点的平行四边形的围道积分

$$\int \operatorname{sn} u e^{inx}dx.$$

由于 $\operatorname{sn} u e^{inx}$ 的周期性, $\int_{\pi}^{\pi\tau}$ 与 $\int_{-2\pi+\pi\tau}^{-\pi}$ 对消. 在积分区域内仅有二极点 $-\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$, $\frac{1}{2}\pi\tau$. 其留数各为

$$-k^{-1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)\exp\left(-ni\pi+\frac{1}{2}n\pi i\tau\right),$$

$$k^{-1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)\exp\left(\frac{1}{2}n\pi i\tau\right).$$

因此得出

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}-\int_{-2\pi+\pi\tau}^{\pi\tau}\right)\operatorname{sn} u e^{nix}dx = \frac{\pi^2 i}{Kk}q^{\frac{1}{2}n}\{1-(-1)^n\}.$$

在第二积分中 x 换成 $x-\pi+\pi\tau$, 则得

$$\{1+(-1)^n q^n\}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sn} u e^{nix}dx = \frac{\pi^2 i}{Kk}q^{\frac{1}{2}n}\{1-(-1)^n\}.$$

因此得出 $bn=0$. 当 n 是偶数,又当 n 是奇数时,有

$$bn=\frac{2\pi}{Kk}\frac{q^{\frac{1}{2}n}}{1-q^n}.$$

由此推出

$$\operatorname{sn} u=\frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}. \tag{4}$$

当 x 是实数时，由于当 $n\to\infty$ 时，$q^{\frac{1}{2}n}e^{nix}$, $q^{\frac{1}{2}n}e^{-nix}$ 都 $\to 0$，不难证明，此式在长条 $|\vartheta x|<\frac{1}{2}\pi\vartheta\tau$ 中仍成立.

读者自证：当 $|\vartheta x|<\frac{1}{2}\pi\vartheta\tau$ 时有

$$\operatorname{cn} u=\frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\cos(2n+1)x}{1+q^{2n+1}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{dn} u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos 2nx}{1+q^{2n}}. \tag{6}$$

§ 15. 附　　记

我们并未象上章那样考虑椭圆函数 $\operatorname{sn}(u,k)$ 的反问题,即给了 $c=k^2$, 我们有没有一个 τ, 能使

$$c=\frac{\vartheta_2^4(o/\tau)}{\vartheta_3^4(o/\tau)}.$$

这问题的回答也是和上章一样,要用模函数论方法,我们不在此赘述了.

公式汇编 (Jacobi)

I

$$\vartheta_1(z,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z. \tag{1}$$

$$\vartheta_2(z,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z. \tag{2}$$

$$\vartheta_3(z,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nz. \tag{3}$$

$$\vartheta_4(z,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz. \tag{4}$$

$$\vartheta_1(z,q)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\sin z\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}). \tag{5}$$

$$\vartheta_2(z,q)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\cos z\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}). \tag{6}$$

$$\vartheta_3(z, q) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}). \tag{7}$$

$$\vartheta_4(z, q) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}). \tag{8}$$

$$q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

II

零点 (mod π, $\tau\pi$)

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1+\tau}{2}\pi$	$\frac{\tau}{2}\pi$

(1)

$$\vartheta_1(-z) = -\vartheta_1(z), \ \vartheta_{\nu+1}(-z) = \vartheta_{\nu+1}(z), \qquad \nu = 1, 2, 3. \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1(z+\pi) = -\vartheta_1(z), \ \vartheta_2(z+\pi) = -\vartheta_2(z), \\ &\vartheta_3(z+\pi) = \vartheta_3(z), \quad \vartheta_4(z+\pi) = \vartheta_4(z). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_2(z), \quad \vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = -\vartheta_1(z), \\ &\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_4(z), \quad \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_3(z). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1(z+\tau\pi) = -A\vartheta_1(z), \ \vartheta_2(z+\tau\pi) = A\vartheta_2(z), \\ &\vartheta_3(z+\tau\pi) = A\vartheta_3(z), \quad \vartheta_4(z+\tau\pi) = -A\vartheta_4(z). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$A = q^{-1}e^{-2iz}.$$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = iB\vartheta_4(z), \quad \vartheta_2\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = B\vartheta_3(z), \\ &\vartheta_3\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = B\vartheta_2(z), \quad \vartheta_4\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = iB\vartheta_1(z). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$B = q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}.$$

III

$$\vartheta_1' = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4. \tag{1}$$

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4. \tag{2}$$

IV

$$k^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}. \tag{1}$$

$$k'^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}. \tag{2}$$

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{3}$$

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2. \tag{4}$$

$$K' = -\frac{1}{2}i\pi\tau\vartheta_3^2. \tag{5}$$

$$K = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{6}$$

$$K' = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{7}$$

V

$$\operatorname{sn} u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} = -\operatorname{sn}(-u). \tag{1}$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} = \operatorname{cn}(-u). \tag{2}$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} = \operatorname{dn}(-u). \tag{3}$$

$$q = e^{\pi i\tau} = \exp(-\pi K'/K). \tag{4}$$

VI

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1. \tag{1}$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u = 1. \tag{2}$$

VII

$$\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \tag{1}$$

$$\operatorname{cn}' u = -\operatorname{sin} u \operatorname{dn} u. \tag{2}$$

$$\operatorname{dn}' u = -k^2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \tag{3}$$

$$\operatorname{sn}'^2 u = (1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u). \tag{4}$$

$$\operatorname{cn}'^2 u = (1-\operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 u). \tag{5}$$

$$\operatorname{dn}'^2 u = (1-\operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2). \tag{6}$$

VIII

$$\gamma(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_2}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_2})}. \tag{1}$$

$$\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_2}) = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\gamma(u)-e_3}}. \tag{2}$$

$$\operatorname{cn}(u\sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{\sqrt{\gamma(u) - e_1}}{\sqrt{\gamma(u) - e_2}}. \tag{3}$$

$$\operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{\sqrt{\gamma(u) - e_3}}{\sqrt{\gamma(u) - e_2}}. \tag{4}$$

IX

$$\operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}. \tag{1}$$

$$\operatorname{cn}(u + K) = -k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}. \tag{2}$$

$$\operatorname{dn}(u + K) = k' \frac{1}{\operatorname{dn} u}. \tag{3}$$

$$\operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k} \frac{1}{\operatorname{sn} u}. \tag{4}$$

$$\operatorname{cn}(u + iK') = -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}. \tag{5}$$

$$\operatorname{dn}(u + iK') = -i \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}. \tag{6}$$

$$\operatorname{sn}(u + K + iK') = \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}. \tag{7}$$

$$\operatorname{cn}(u + K + iK') = -i \frac{k'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} u}. \tag{8}$$

$$\operatorname{dn}(u + K + iK') = ik' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}. \tag{9}$$

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u. \tag{10}$$

$$\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u. \tag{11}$$

$$\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u. \tag{12}$$

$$\operatorname{sn}(u + 2iK') = \operatorname{sn} u. \tag{13}$$

$$\operatorname{cn}(u + 2iK') = -\operatorname{cn} u. \tag{14}$$

$$\operatorname{dn}(u + 2iK') = -\operatorname{dn} u. \tag{15}$$

$$\operatorname{sn}(u + 2K + 2iK') = -\operatorname{sn} u. \tag{16}$$

$$\operatorname{cn}(u + 2K + 2iK) = \operatorname{cn} u. \tag{17}$$

$$\operatorname{dn}(u + 2K + 2iK) = -\operatorname{dn} u. \tag{18}$$

X

$$\operatorname{sn}(u + v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{1}$$

$$\operatorname{cn}(u + v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{2}$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{3}$$

$$\operatorname{sn}(u + v) + \operatorname{sn}(u - v) = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{4}$$

$$\mathrm{sn}(u+v)-\mathrm{sn}(u-v)=\frac{2\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{5}$$

$$\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{cn}(u-v)=\frac{2\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{cn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{6}$$

$$\mathrm{cn}(u+v)-\mathrm{cn}(u-v)=\frac{-2\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{dn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{7}$$

$$\mathrm{dn}(u+v)+\mathrm{dn}(u-v)=\frac{2\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{dn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{8}$$

$$\mathrm{dn}(u+v)-\mathrm{dn}(u-v)=\frac{-2k^2\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{9}$$

XI

$$\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{sn}(u-v)=\frac{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2 v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{1}$$

$$\mathrm{cn}(u+v)\mathrm{cn}(u-v)=\frac{\mathrm{cn}^2 v-\mathrm{dn}^2 v\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{2}$$

$$\mathrm{dn}(u+v)\mathrm{dn}(u-v)=\frac{\mathrm{dn}^2 v-k^2\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2 u}. \tag{3}$$

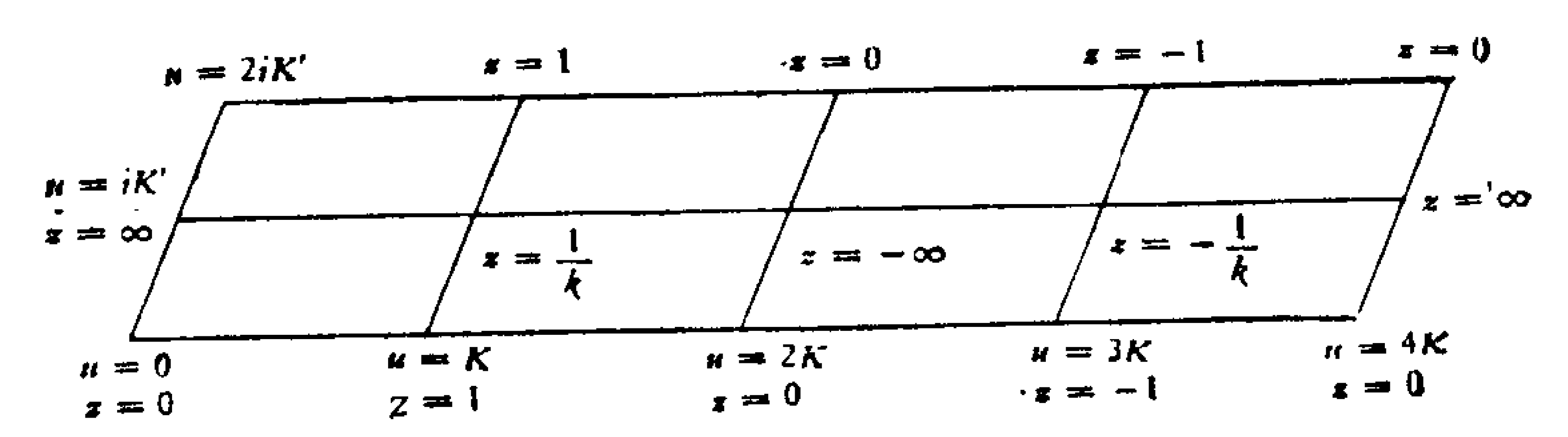


图 76　$z=\mathrm{sn}(u,k)$

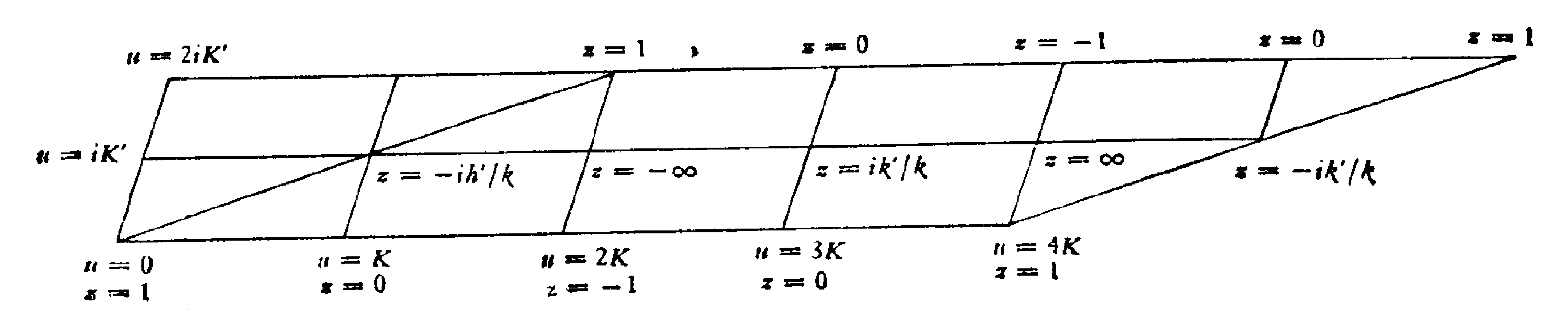


图 77　$z=\mathrm{cn}(u,k)$

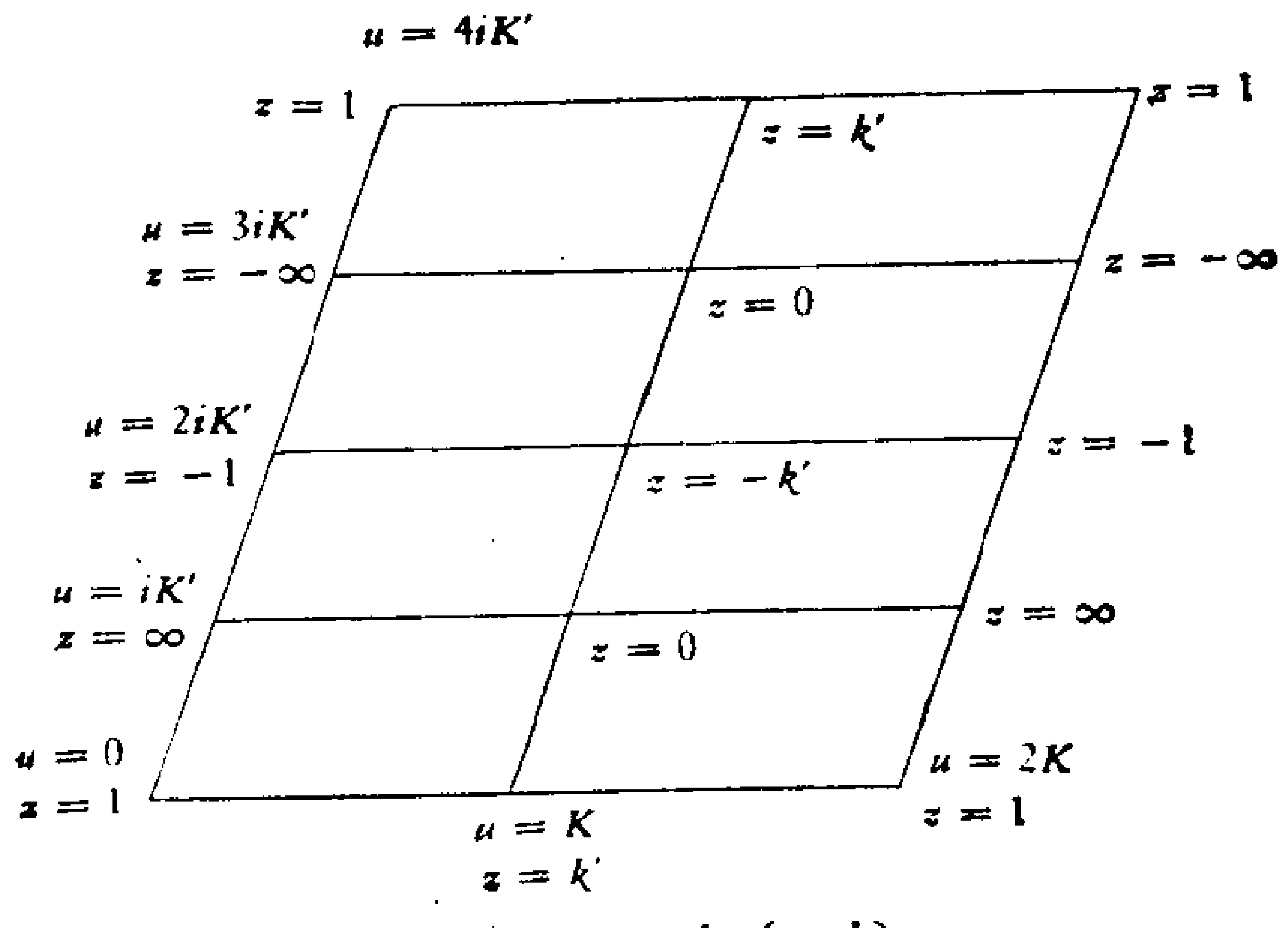


图 78　$z=\mathrm{dn}(u,k)$

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学引论　第二卷　第一分册
作者＝华罗庚
页数＝２８８
ＳＳ号＝１０２３７１２７
出版日期＝１９８１年０６月第１版

前言
目录

第一章　复数平面上的几何
　　１．　复数平面
　　２．　复平面上的几何学
　　３．　线性变形（Ｍ？ｂｉｕｓ变形）
　　４．　群与分群
　　５．　Ｎｅｕｍａｎｎ球
　　６．　交比
　　７．　圆对
　　８．　圆串（Ｐｅｎｃｉｌ）
　　９．　圆族（Ｂｕｎｄｌｅ）
　　１０．　Ｈｅｒｍｉｔｉａｎ方阵
　　１１．　变形分类
　　１２．　广义线性群
　　１３．　射影几何的基本定理
第二章　非欧几何学
　　１．　欧几里得几何学（抛物几何学）
　　２．　球面几何学（椭圆几何学）
　　３．　椭圆几何的一些性质
　　４．　双曲几何（Ｌｏｂａчевский几何）
　　５．　距离
　　６．　三角形
　　７．　平行公理
　　８．　非欧运动分类
第三章　解析函数、调和函数的定义及例子
　　１．　复变函数
　　２．　保角变换（或称共形映照）
　　３．　Ｃａｕｃｈｙ－Ｒｉｅｍａｎｎ方程
　　４．　解析函数
　　５．　幂函数
　　６．　Жуковский函数
　　７．　对数函数
　　８．　三角函数
　　９．　一般的幂函数
　　１０．　保解变换的基本定理
第四章　调和函数
　　１．　中值定理
　　２．　Ｐｏｉｓｓｏｎ公式
　　３．　奇异积分
　　４．　Ｄｉｒｉｃｈｌｅｔ问题
　　５．　上半平面的Ｄｉｒｉｃｈｌｅｒ问题
　　６．　调和函数的展开式
　　７．　Ｎｅｕｍａｎｎ问题
　　８．　最大值最小值原理
　　９．　调和函数贯
　　１０．　Ｓｃｈｗａｒｚ引理
　　１１．　Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅ定理
　　１２．　保角变换的唯一性
　　１３．　映进映照
　　１４．　单连通域的Ｄｉｒｉｃｈｌｅｔ问题
　　１５．　单连通域的Ｃａｕｃｈｙ公式
第五章　点集论与拓扑学中的若干预备知识
　　１．　收敛
　　２．　紧致点集
　　３．　Ｃａｎｔｏｒ－Ｈｉｌｂｅｒｔ对角线法
　　４．　点集的类别
　　５．　映照或变形
　　６．　一致连续
　　７．　拓扑映照
　　８．　曲线

９． 连通性
１０． Ｊｏｒｄａｎ定理的特例
１１． 连通数
第六章 解析函数
１． 解析函数的定义
２． 一些几何概念
３． Ｃａｕｃｈｙ定理
４． 解析函数的微商
５． Ｔａｙｌｏｒ级数
６． Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ重级数定理
７． 由积分定义解析函数
８． Ｌａｕｒｅｎｔ级数
９． 零点，极点
１０． 孤立奇点
１１． 无穷远点的解析性
１２． Ｃａｕｃｈｙ不等式
１３． 解析拓展
１４． 多值函数
１５． 奇点的位置
第七章 留数及其应用于定积分的计算
１． 留数
２． 有理函数沿圆周的积分
３． 由－∞到＋∞的某种积分
４． 某些包有正弦余弦的积分
５． 积分？ｘａ－１？（ｘ）ｄｘ
６． Γ函数
７． Ｃａｕｃｈｙ主值
８． 与动量问题有关的积分
９． 极点与零点的个数
１０． 代数方程的根
１１． 级数求和
１２． 常系数线性微分方程
１３． Ｂüｒｍａｎｎ，Ｌａｇｒａｎｇｅ公式
１４． Ｐｏｉｓｓｏｎ－Ｊｅｎｓｅｎ公式
第八章 最大模原理与函数族
１． 最大模原理
２． Ｐｈｒａｇｍｅｎ－Ｌｉｎｄｅｌ？ｆ定理
３． Ｈａｄａｍａｒｄ三圆定理
４． 关于｜ｆ（ｚ）｜均值的Ｈａｒｄｙ定理
５． 引理
６． 一般均值定理
７． （ｌｐ（ｒ））？
８． Ｖｉｔａｌｉ定理
９． 囿函数族
１０． 正规族
第九章 整函数与亚纯函数
１． 定义
２． Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ分解定理
３． 整函数的阶
４． Ｈａｄａｍａｒｄ分解定理
５． Ｍｉｔｔａｇ－Ｌｅｆｆｌｅｒ定理
６． ｃｔｇ ｚ与ｓｉｎ ｚ的表示式
７． Γ函数
８． ζ函数
９． 函数方程
１０． 球面收敛
１１． 亚纯函数的正规族
第十章 保角变换
１． 重要内容概要
２． 单叶函数
３． Ｔａｙｌｏｒ级数求逆

４．　域的映象
５．　单叶函数贯
６．　边界与内部
７．　Ｒｉｅｍａｎｎ映照定理
８．　第二系数的估计
９．　推论
１０．　Ｋｏｅｂｅ之歪扭定理
１１．　Ｌｉｔｔｌｅｗｏｏｄ的估计
１２．　星形区
１３．　实系数
１４．　把三角形变成上半平面
１５．　Ｓｃｈｗａｒｚ反射原理
１６．　把四边形变为上半平面
１７．　Ｓｃｈｗａｒｚ－Ｃｈｒｉｓｔｏｆｆｅｌ法－－把多边形变为上半平面
１８．　续
１９．　补充
第十一章　求和法
１．　Ｃｅｓáｒｏ求和法
２．　Ｈōｌｄｅｒ求和法
３．　与均值有关的两条引理
４．　（Ｃ，ｋ）与（Ｈ，ｋ）等价性的证明
５．　（Ｃ，ａ）求和
６．　Ａｂｅｌ求和法
７．　一般求和法简介
８．　Ｂｏｒｅｌ求和法
９．　Ｈａｒｄｙ－Ｌｉｔｔｌｅｗｏｏｄ定理
１０．　Ｔａｕｂｅｒ定理
１１．　在收敛圆圆周上的渐近性质
１２．　Ｈａｒｄｙ－Ｌｉｔｔｌｅｗｏｏｄ定理
１３．　Ｌｉｔｔｌｅｗｏｏｄ的Ｔａｕｂｅｒ定理
１４．　解析性与收敛性
１５．　Ｂｏｒｅｌ多角形
第十二章　适合各种边界条件的调和函数
１．　引言
２．　Ｐｏｉｓｓｏｎ方程
３．　双调和方程
４．　单位圆的双调和方程
５．　Ｃａｕｃｈｙ型积分的背景
６．　Ｃａｕｃｈｙ型积分
７．　Ｃｏｘｏцкий公式
８．　Ｈｉｌｂｅｒｔ－Ｐｒｉｖａｌｏｖ问题
９．　续
１０．　Ｒｉｅｍａｎｎ－Ｈｉｌｂｅｒｔ问题
１１．　混合边界值问题解答的唯一性
１２．　КелдъＩш－Седов公式
１３．　其他域的КелдъＩш－Седов公式
１４．　一个混合型偏微分方程
第十三章　Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ的椭圆函数论
１．　模
２．　周期函数
３．　周期整函数的展开式
４．　基域
５．　椭圆函数的一般性质
６．　代数相关性
７．　椭圆函数的两种理论
８．　Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓζ函数
９．　ｒ（ｚ）与ｒ′（ｚ）的代数关系
１０．　函数ζ（ｚ）
１１．　б（ｚ）函数
１２．　椭圆函数的一般表达式
１３．　加法公式

１４．　椭圆函数的积分
１５．　代数函数域
１６．　反问题
１７．　模变换
１８．　基域
１９．　基域纲
２０．　模群三构造
２１．　模函数的定义和性质
２２．　Ｊ（τ）
２３．　方程ｇ２（ｗ，ｗ′）＝ａ，ｇ３（ｗ，ｗ′）＝ｂ的求解
２４．　任一模函数是Ｊ（τ）的有理函数
第十四章　Ｊａｃｏｂｉ的椭圆函数
１．　？函数
２．　？函数的零点与无穷乘积的表达式
３．　Ｇ＝？（１－ｑ２ｎ）
４．　用？函数表椭圆函数
５．　诸？函数的平方的关系式
６．　和差公式
７．　？函数的商所适合的微分方程
８．　Ｊａｃｏｂｉ的椭圆函数
９．　周期性
１０．　解析性质
１１．　Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ函数与Ｊａｃｏｂｉ函数之间的关系
１２．　加法公式
１３．　把Ｋ，Ｋ′表为ｋ，ｋ′的函数
１４．　Ｊａｃｏｂｉ椭圆函数的一些表达式
１５．　附记